ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

10625 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1885.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

4328

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE.

PAR M. P. APPELL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Soit $F(z)$ une fonction uniforme de z vérifiant les deux équations

$$(1)\qquad F(z+2K)=F(z),\quad F(z+2iK')=e^{-\frac{m\pi z i}{K}}F(z)$$

et n'ayant que des pôles dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$. J'ai montré (*Annales de l'École Normale*, 1884) que cette fonction $F(z)$ peut être décomposée en une somme d'éléments simples possédant chacun un seul pôle et en une partie entière qui est toujours nulle lorsque l'entier m est négatif. L'élément de cette décomposition est la fonction

$$(2)\qquad \chi_\mu(z,\alpha)=\frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}}q^{\mu n(n-1)}\cot\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK'),$$

que l'entier m qui figure dans les relations (1) soit positif ou négatif.

Lorsque m est négatif, $m = -\mu$, l'élément de la décomposition de $F(z)$ est $\chi_\mu(z, \alpha)$, α étant un paramètre qui coïncide successivement avec les pôles de $F(z)$; lorsque m est positif, cet élément est la fonction $\chi_m(\alpha, z)$, où α coïncide successivement avec les pôles de $F(z)$.

Cette transcendante $\chi_\mu(z, \alpha)$ avait été rencontrée par M. Hermite dans des recherches déjà anciennes qui n'ont pas été publiées [1] et dont M. Hermite m'a donné communication, après l'impression de mon précédent Mémoire. Voici, en quelques mots, l'indication de la méthode suivie par M. Hermite. Envisageant une fonction de la forme

$$F(x) = \frac{\Theta(x-\alpha)\Theta(x-\beta)\ldots\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-a)\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

où le nombre des Θ est plus grand au numérateur qu'au dénominateur, il ramène d'abord la décomposition de $F(x)$ en éléments simples à la décomposition d'une fonction analogue contenant un seul Θ au numérateur; et cela de la façon suivante. La fonction $F(x)$ peut être écrite

$$F(x) = \Phi(x)\frac{1}{\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

où $\Phi(x)$ contient autant de Θ au numérateur qu'au dénominateur. Cette fonction $\Phi(x)$ est donc doublement périodique de seconde espèce et peut être mise sous la forme

$$\Phi(x) = A\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)} + B\frac{\Theta(x-b')}{\Theta(x-b)} + \ldots + L\frac{\Theta(x-l')}{\Theta(x-l)};$$

remplaçant $\Phi(x)$ par cette expression, on trouve $F(x)$ décomposée en une somme de termes, tels que

$$\varphi(x) = A\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

contenant un seul Θ au numérateur. Pour décomposer enfin cette fonction $\varphi(x)$ en éléments simples, M. Hermite considère le produit

$$f(z) = \varphi(z)\cot\frac{\pi}{2K}(z-x)$$

---

[1] Dans la publication intitulée : *In memoriam Dominici Chelini Collectanea mathematica* (Milan, 1881). M. Hermite a indiqué quelques formules très importantes relatives à ce sujet.

qui admet par rapport à z la période $2K$. L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$, prise le long d'un contour sur lequel $f(z)$ ne devient pas infinie, est égale à la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles de cette fonction situés dans ce contour. Prenons pour contour d'intégration celui d'un parallélogramme PQRS dont les sommets sont les points

$$\begin{aligned} &P(z_0 + 2niK'), && Q(z_0 - 2niK'),\\ &R(z_0 + 2K - 2niK'), && S(z_0 + 2K + 2niK'), \end{aligned}$$

n désignant un entier positif. La fonction $f(z)$ devient infiniment petite sur les côtés PS et QR quand n augmente indéfiniment; il en est de même de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ le long de ces côtés. De plus, comme $f(z)$ admet la période $2K$, l'intégrale $\int f(z)\,dz$ a des valeurs égales et de signes contraires sur les côtés PQ et RS. Donc la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles situés dans ce parallélogramme tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. En formant ces résidus et écrivant que leur somme est nulle, on obtient la fonction

$$\varphi(x) = A\,\frac{\Theta(x-a')}{\Theta(x-a)\,\Theta(x-m)\ldots\Theta(x-r)},$$

exprimée par la somme de séries convergentes qui ne diffèrent que par des facteurs constants des fonctions

$$\chi_\mu(x+t+iK', a+t),\ \chi_\mu(x+t+iK', m+t),\ \ldots,$$

t désignant la constante

$$\frac{1}{\mu}(a'-a-m-\ldots-r)-K$$

et μ l'excès du nombre des Θ du dénominateur sur celui du numérateur.

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui où la quantité a' qui figure au numérateur de $\varphi(x)$ est égale à l'une des quantités $a, m, \ldots, r$ du dénominateur. Relativement à ce cas, je trouve, dans des Notes manuscrites que M. Hermite m'a fait l'honneur de me communiquer, la formule suivante. Soit

$$\Phi(x) = \Theta(x-a)\,\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)$$

le nombre des facteurs étant égal à μ, et

$$\frac{1}{A} = H(a-b)H(a-c)\ldots H(a-l),$$

$$\frac{1}{B} = H(b-a)H(b-c)\ldots H(b-l),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)}{\Phi(x)} = {} & A\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu a - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-a-\nu iK') \\ & + B\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu b - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-b-\nu iK') \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + L\sum i^{-\mu\nu} q^{\frac{\mu\nu^2}{4}} e^{\frac{\nu i\pi}{2K}(\mu l - s)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-l-\nu iK'),\end{aligned}$$

les sommes étant étendues à toutes les valeurs *impaires* de ν, de $-\infty$ à $+\infty$, et s désignant la somme $a+b+\ldots+l$. On reconnaît immédiatement que les séries multipliées par A, B, ..., L sont des fonctions χ_μ, d'après la notation (2). Ainsi le coefficient de A est égal à

$$\frac{2K}{\pi} i^\mu \sqrt[4]{q^\mu} e^{-\frac{\pi i}{2K}(\mu a - s)} \chi_\mu\left(x - \frac{s}{\mu} - K + iK', a - \frac{s}{\mu} - K\right).$$

Je trouve encore, dans les mêmes Notes de M. Hermite, la formule

$$(3) \qquad \frac{2Ki}{\pi} H'(0) \frac{H(a-b)\Theta(x-p)}{\Theta(x-a)\Theta(x-b)} = H(a-p)f_a - H(b-p)f_b,$$

où

$$f_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi\nu}{2K}(p-b)} q^{\frac{\nu^2}{4}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-a-\nu iK'),$$

$$f_b = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi\nu}{2K}(p-a)} q^{\frac{\nu^2}{4}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-b-\nu iK'),$$

avec

$$\nu = 2n+1,$$

formule qui s'obtient immédiatement par l'application de la méthode de M. Hermite, exposée à la page 11. Si l'on pose

$$t = p - a - b - K,$$

on a

$$f_a = \frac{2K}{\pi i}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi(a+t)i}{2K}}\chi_1(x+t+iK', a+t),$$

$$f_b = \frac{2K}{\pi i}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi(b+t)i}{2K}}\chi_1(x+t+iK', b+t).$$

C'est un extrait de ces recherches que M. Hermite a donné dans les *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini;* la fonction

$$\varphi(x,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)i\pi\omega}{2K}}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}[x-(2n+1)iK']},$$

qu'il considère à la page 5, n'est autre chose que

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}\chi_1(x+\omega+K+iK', \omega+K);$$

et la formule de M. Hermite

$$\varphi(x)e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)} = -\varphi(x+2iK') + H(\omega)\left[1 - e^{\frac{i\pi}{K}(x+iK'+\omega)}\right]$$

donne, par un simple changement de notations, la formule fondamentale relative à la fonction χ_1

$$\chi_1(z+2iK', \alpha) = e^{\frac{\pi z i}{K}}\chi_1(z,\alpha) - \frac{\pi i}{2K}\left(1+e^{\frac{\pi z i}{K}}\right)g_0^{(1)}(\alpha),$$

où

$$g_0^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{\frac{\pi\alpha i}{2K}}H_1(\alpha).$$

Il est intéressant de remarquer que la formule que M. Hermite donne sans démonstration à la fin de cet article se déduit de la formule (3) en y faisant $p=0$, et en changeant les lettres x, a, b respectivement en z, $x+iK'$, $y+iK'$.

2. Jusqu'ici nous avons exposé la méthode de M. Hermite en nous plaçant dans le cas particulier où la fonction à décomposer ne possède que des pôles *simples*. Lorsque cette fonction admet un pôle $x=a$

d'ordre m de multiplicité, la formule de décomposition contient l'élément simple qui admet pour pôle simple le point a et les $(m-1)$ premières dérivées de cet élément par rapport au paramètre. C'est ce qui résulte immédiatement de la méthode de M. Hermite. En effet, appliquons, par exemple, cette méthode à la fonction

$$\Phi(x) = \frac{\Theta(x-a')}{\Theta^2(x-a)\,\Theta(x-b)\ldots\Theta(x-l)},$$

qui admet pour pôle double le point $a+i\mathrm{K}'$ et ses homologues. Nous devons écrire, pour obtenir la formule de décomposition, que les pôles de la fonction de z

$$\Phi(z)\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x),$$

situés dans le parallélogramme désigné précédemment par PQRS (p. 11) ont une somme qui tend vers zéro quand les côtés PS et QR s'éloignent indéfiniment. Voyons quels sont, dans cette somme, les termes provenant du facteur double $\Theta^2(z-a)$ du dénominateur. Dans le voisinage du pôle double

$$z = a+(2n+1)i\mathrm{K}',$$

en posant

$$z = a+(2n+1)i\mathrm{K}'+\varepsilon,$$

on a

$$\Phi(z) = \frac{\mathrm{R}_n}{\varepsilon^2}+\frac{\mathrm{R}'_n}{\varepsilon}+\ldots,$$

$$\begin{aligned}\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x) &= \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x]\\ &\quad+\varepsilon\mathrm{D}_a\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x]+\ldots.\end{aligned}$$

Le résidu du produit $\Phi(z)\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-x)$ relativement à ce pôle est donc

$$\mathrm{R}'_n\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x]+\mathrm{R}_n\mathrm{D}_a\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[a+(2n+1)i\mathrm{K}'-x],$$

et la somme de ces résidus est composée linéairement avec l'élément simple et sa dérivée par rapport au paramètre. Ce fait résulte aussi d'une manière simple de la méthode que j'ai employée dans mon pre-

mier Mémoire (p. 153 et suiv.) pour obtenir la formule de décomposition.

Je citerai, comme exemples, les formules que M. Biehler a démontrées dans les nos 75, 77, 79 de sa Thèse en employant la méthode de M. Hermite. Il serait aisé de retrouver ces formules par l'application de la méthode que j'ai indiquée.

Pour cela, prenons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{\Theta(z)}{H_1^2(z)}$$

qui vérifie les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi(z+2K) &= \varphi(z), \\ \varphi(z+2iK') &= e^{\frac{\pi i}{K}(z+K+iK')}\varphi(z). \end{aligned}$$

Pour appliquer la méthode que j'ai donnée, il faut commencer par faire un changement de variable qui ramène ces équations à la forme (1); c'est ce que l'on réalise en posant

$$z + K + iK' = t;$$

la fonction à décomposer devient

$$\Phi(t) = \frac{\Theta(t-K-iK')}{H_1^2(t-K-iK')} = \frac{\Theta_1(t-iK')}{H^2(t-iK')};$$

cette fonction vérifie les deux équations

$$\Phi(t+2K) = \Phi(t), \quad \Phi(t+2iK') = e^{\frac{\pi t i}{K}}\Phi(t),$$

qui sont bien de la forme (1); elle a, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $t = iK'$ qui est un pôle double. La formule de décomposition sera de la forme

$$\Phi(t) = A\chi_1(t, iK') + B\chi_1'(t, iK'),$$

$\chi_1'(t, iK')$ désignant la dérivée $\frac{d\chi_1(t,\alpha)}{d\alpha}$ dans laquelle on remplace α par iK'. Ces deux coefficients A et B sont les coefficients de

$$\frac{1}{t-iK'}, \quad \frac{1}{(t-iK')^2}$$

dans le développement de $\Phi(t)$ au voisinage du pôle $t = iK'$. Pour les trouver faisons

$$t = iK' + \varepsilon;$$

alors

$$\Phi(t) = \frac{\Theta_1(\varepsilon)}{H^2(\varepsilon)} = \frac{\Theta_1(o) + \varepsilon^2\Theta_1''(o) + \ldots}{H'^2(o)\varepsilon^2 + \ldots},$$

$$\Phi(t) = \frac{\Theta_1(o)}{H'^2(o)}\frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots;$$

le coefficient A de $\frac{1}{\varepsilon}$ est donc nul, et l'on a

$$B = \frac{\Theta_1(o)}{H'^2(o)} = \frac{\theta_1}{k\theta^2},$$

donc enfin

$$\frac{\Theta_1(t - iK')}{H^2(t - iK')} = \frac{\theta_1}{k\theta^2}\chi_1'(t, iK'). \tag{4}$$

Revenant à la variable z par la formule

$$t = z + K + iK',$$

on a enfin

$$\frac{\Theta(z)}{H_1^2(z)} = \frac{\theta_1}{k\theta^2}\chi_1'(z + K + iK', iK'),$$

ce qui, d'après l'expression (2) de $\chi_1(z, \alpha)$ et l'expression qu'on en déduit,

$$\chi_1'(z, \alpha) = \frac{\pi^2}{4K^2}\sum e^{\frac{n\pi\alpha i}{K}} q^{n(n-1)}\left[2ni\cot\frac{\pi}{2K}(z - \alpha - 2niK') + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2K}(z - \alpha - 2niK')}\right],$$

n'est autre chose que la première des formules données par M. Biehler dans le n° **77**.

Si, dans la formule (4), on fait

$$t - iK' = z,$$

on obtient le développement de $\frac{\Theta_1(z)}{H^2(z)}$ tel qu'il est donné par M. Biehler.

Du reste, dès que l'on a obtenu le développement de l'une des quatre fonctions d'un même groupe (d'après la classification de M. Biehler),

on en conclut celui des trois autres en augmentant z de

$$\mathrm{K},\quad i\mathrm{K}',\quad \mathrm{K}+i\mathrm{K}'.$$

C'est ainsi que le développement de $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)}$ se déduit de celui de $\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$ par le changement de z en $z+i\mathrm{K}'$. Comme l'on a

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}_1^2(z+i\mathrm{K}')}=i\sqrt[4]{q}\,.\,e^{\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)},$$

on trouve ainsi

$$\theta_1\eta^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)}=-\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}}\sum_m q^{m^2}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)}-2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right],$$

où

$$x=\frac{\pi z}{2\mathrm{K}},\quad \nu=2m-1,\quad \omega=\frac{i\pi\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}.$$

On reconnaît, comme il suit, l'identité de ce développement avec celui que donne M. Biehler. En faisant passer le facteur e^{-xi} sous le signe Σ, on trouve, pour le terme général de la série, l'expression

$$q^{m^2}e^{-xi}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)}-2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right]$$

ou encore, puisque $e^{\omega i}=\sqrt{q}$,

$$q^{m^2-m+\frac{1}{4}}e^{-(x-\nu\omega)i}\left[\frac{1}{\cos^2(x-\nu\omega)}-2mi\,\mathrm{tang}(x-\nu\omega)\right].$$

Mais on a identiquement

$$e^{-iu}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,u+\frac{\mathrm{B}}{\cos^2 u}\right)=\frac{\mathrm{B}-i\mathrm{A}}{\cos u}-\frac{i\mathrm{B}\sin u}{\cos^2 u}+i\mathrm{A}e^{-iu};$$

on en conclut que le facteur de $q^{m^2-m+\frac{1}{4}}$ est égal à

$$-\frac{2m-1}{\cos(x-\nu\omega)}-\frac{i\sin(x-\nu\omega)}{\cos^2(x-\nu\omega)}+2me^{-(x-\nu\omega)i}.$$

On obtient enfin, en transformant ainsi le terme général,

$$\theta_1\eta_1^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)}=-\sum q^{\frac{\nu^2}{4}}\left[\frac{\sin(x-\nu\omega)}{\cos^2(x-\nu\omega)}+\frac{\nu i}{\cos(x-\nu\omega)}\right]-\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sum_{-\infty}^{+\infty}2mq^{m^2}e^{-ix}.$$

Cette dernière somme étant nulle, on obtient bien le développement tel qu'il est donné par M. Biehler.

Enfin, je terminerai ces remarques en appliquant la méthode que j'ai indiquée dans mon précédent Mémoire à la démonstration des deux formules

$$\left[\frac{\theta\theta_1\eta}{\Theta(x)}\right]^2 = \sum_\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}\left(\frac{2K}{\pi}D_x - 2i\nu\right)\cot\frac{\pi}{2K}(x - i\nu K'),$$

$$\left[\frac{\theta\theta_1\eta}{H(x)}\right]^2 = \sum_\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}\left(2i\mu - \frac{2K}{\pi}D_x\right)\cot\frac{\pi}{2K}(x - i\mu K'),$$

qui m'ont été communiquées par M. Hermite, et dont la démonstration est très simple par sa méthode; dans ces séries, l'entier ν prend toutes les valeurs *impaires* et μ toutes les valeurs *paires* de $-\infty$ à $+\infty$.

La fonction

$$F(x) = \frac{1}{\Theta^2(x)}$$

vérifie les relations

$$F(x + 2K) = F(x), \quad F(x + 2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K}(x + iK')}F(x);$$

faisant alors

$$x + iK' = z, \quad \Phi(z) = F(x) = F(z - iK'),$$

on a

$$\Phi(z) = -\sqrt[2]{q}\,.\,e^{-\frac{\pi z i}{K}}\frac{1}{H^2(z)},$$

et cette fonction vérifie les équations

$$\Phi(z + 2K) = \Phi(z), \quad \Phi(z + 2iK') = e^{\frac{2\pi z i}{K}}\Phi(z),$$

qui sont de la forme (1) où $m = -2$. La fonction $\Phi(z)$ a, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $z = 0$, et, dans le voisinage de ce point, on a

$$\Phi(z) = -\frac{\sqrt[2]{q}}{H'^2(0)}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{\pi i}{K}\frac{1}{z}\right) + \ldots.$$

On aura donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$\Phi(z) = -\frac{\sqrt[2]{q}}{H'^2(0)}\left[\chi'_2(z, 0) - \frac{\pi i}{K}\chi_2(z, 0)\right]$$

où, d'après l'équation (2) définissant χ_μ,

$$\sqrt[4]{q}\,\chi_2(z, \alpha) = \frac{\pi}{2K}\sum e^{\frac{2n\pi\alpha i}{K}} q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \cot\frac{\pi}{2K}(z - \alpha - 2niK'),$$

$$\sqrt[4]{q}\,\chi'_2(z, \alpha) = \frac{\pi^2}{4K^2}\sum e^{\frac{2n\pi\alpha i}{K}} q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \left[4ni\cot\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK') + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2niK')}\right].$$

En faisant, dans ces formules, $\alpha = 0$ et substituant, on aura le développement de $\Phi(z)$, et, en revenant à la variable x par la formule

$$F(x) = \Phi(x + iK'),$$

on obtiendra le développement de $\frac{1}{\Theta^2(x)}$ tel qu'il est écrit plus haut.

Notre calcul donne en même temps le développement de $\frac{1}{H^2(z)}$ qui est égal à

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{K}} \Phi(z).$$

Le terme général de la série ainsi obtenue contiendra en facteur l'exponentielle $e^{\frac{\pi z i}{K}}$, que l'on fera disparaître en appliquant à ce terme général l'identité [1]

$$e^{2ui}\left(A\cot u + \frac{B}{\sin^2 u}\right) = (A + 2Bi)\cot u + \frac{B}{\sin^2 u} + iA(1 + e^{2ui}) - 2B$$

et remarquant que, dans la somme, la partie entière disparaît.

3. Les recherches de M. Hermite, que je viens de rappeler et dont j'ai donné plusieurs exemples, avaient été entreprises afin de démontrer dans toute sa généralité une loi que M. Biehler, dans son excellente Thèse, a vérifiée sur un grand nombre d'exemples :

Si l'on développe une fonction doublement périodique de troisième espèce en une série ordonnée par rapport aux puissances de q, on voit apparaître dans les sinus et cosinus qui forment le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ *les*

---

[1] Voir *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Hermite, p. 321 et suiv.

combinaisons $\frac{\delta' \pm m\delta}{2}$ *des diviseurs conjugués* δ *et* δ' *de* N; *le signe* + *convenant au cas où il y a au numérateur m fonctions* Θ *de plus qu'au dénominateur et le signe* — *au cas où il y a au dénominateur m fonctions* Θ *de plus qu'au numérateur.*

Quoique M. Hermite ait complètement démontré cette loi, il a bien voulu m'engager à publier les résultats que j'ai trouvés sur ce sujet en suivant la méthode employée dans mon précédent Mémoire.

4. Je me propose, en conséquence, de former des développements en série des fonctions

$$\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a+i\mathrm{K}'),\ \chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a),\ \chi_\mu(x, a+i\mathrm{K}'),\ \chi_\mu(x, a),$$

ordonnés suivant les puissances de q. Ces développements une fois connus, il suffira, pour former les développements en série de toutes les fonctions, telles que (1), d'appliquer à ces fonctions la formule de décomposition en éléments simples et de développer ensuite chaque élément.

Reprenons le développement de la fonction (2) sous la forme

$$(5)\qquad \chi_\mu(x, a) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n}};$$

en y changeant x et a en $x+i\mathrm{K}'$ et $a+i\mathrm{K}'$, on obtient

$$(5')\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a+i\mathrm{K}') = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$(6)\qquad \alpha = \frac{\pi(x-a)}{\mathrm{K}}, \quad \beta = \frac{\mu\pi a}{\mathrm{K}}$$

et réunissons, dans la série (5'), les termes correspondant à des valeurs de n égales et de signes contraires, après avoir isolé le terme correspondant à $n = 0$.

Nous aurons alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2K}{\pi i}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &= \frac{e^{\alpha i}+1}{e^{\alpha i}-1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\left(e^{n\beta i}\frac{e^{\alpha i}+q^{2n}}{e^{\alpha i}-q^{2n}} + e^{-n\beta i}\frac{e^{\alpha i}+q^{-2n}}{e^{\alpha i}-q^{-2n}}\right). \end{aligned}\right.$$

Supposons que le module de $e^{\alpha i}$ soit compris entre celui de q^2 et celui de $\frac{1}{q^2}$,

$$|q^2| < |e^{\alpha i}| < \left|\frac{1}{q^2}\right|;$$

nous aurons, pour toutes les valeurs positives de n,

$$\frac{e^{\alpha i}+q^{2n}}{e^{\alpha i}-q^{2n}} = \frac{1+q^{2n}e^{-\alpha i}}{1-q^{2n}e^{-\alpha i}} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{2n\nu}e^{-\nu\alpha i},$$

car le module de $q^{2n}e^{-\alpha i}$ est moindre que l'unité; de même,

$$\frac{e^{\alpha i}+q^{-2n}}{e^{\alpha i}-q^{-2n}} = -\frac{1+q^{2n}e^{\alpha i}}{1-q^{2n}e^{\alpha i}} = -1 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{2n\nu}e^{\nu\alpha i}.$$

Portant ces développements dans le terme général de la série (7), nous obtenons la série double

$$\begin{aligned} &\frac{2K}{\pi i}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &= \frac{e^{\alpha i}+1}{e^{\alpha i}-1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}(e^{n\beta i}-e^{-n\beta i}) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{\mu n^2+2n\nu}(e^{n\beta i-\nu\alpha i}-e^{-n\beta i+\nu\alpha i}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\frac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') \\ &= \tfrac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\sin n\beta - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{\mu n^2+2n\nu}\sin(n\beta-\nu\alpha); \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{K}{\pi}\chi_\mu(x+iK', a+iK') = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} 2q^{\mu n^2+2n\nu}\sin(n\beta-\nu\alpha),$$

en convenant que le facteur 2 qui figure dans le terme général de la série doit être remplacé par 1 lorsque $\nu = 0$. Si l'on remet pour α et β leurs valeurs (6), on obtient ainsi le développement

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{K}{\pi}\chi_\mu(x + iK', a + iK') \\ &\quad = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2K}(x-a) - \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} 2q^{\mu n^2+2n\nu}\sin\left[(\mu n + \nu)\frac{\pi a}{K} - \nu\frac{\pi x}{K}\right]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de q

$$(9)\quad \frac{K}{\pi}\chi_\mu(x + iK', a + iK') = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2K}(x-a) - \sum_{N=1}^{N=\infty} q^N A_N^{(\mu)}(x, a),$$

quelle sera l'expression du coefficient $A_N^{(\mu)}(x, a)$ de q^N? Pour la trouver, supposons

$$N = \mu n^2 + 2n\nu = n(\mu n + 2\nu);$$

soit

$$N = \delta\delta'$$

une décomposition de N en deux facteurs, δ désignant le plus petit des deux facteurs (si ces facteurs sont inégaux), on aura

$$n = \delta, \quad \mu n + 2\nu = \delta',$$

d'où

$$\nu = \frac{\delta' - \mu\delta}{2}, \quad \mu n + \nu = \frac{\delta' + \mu\delta}{2};$$

on aura, par suite, pour l'expression du coefficient $A_N^{(\mu)}(x, a)$,

$$(9')\quad A_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'} 2\sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{2}\frac{\pi a}{K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{2}\frac{\pi x}{K}\right),$$

la somme étant étendue aux couples de diviseurs de N pour lesquels $\frac{\delta' - \mu\delta}{2}$ est un *entier positif* ou *nul* avec cette convention que, lorsque $\frac{\delta' - \mu\delta}{2}$ sera nul, on remplacera le coefficient 2 qui multiplie le sinus par le coefficient 1. On peut remarquer que le diviseur δ est au plus égal

à $\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mu}}$, car, en multipliant par δ la condition

$$\delta' - \mu\delta \geq 0,$$

on obtient

$$\mathrm{N} - \mu\delta^2 \geq 0.$$

5. Voici maintenant le développement de la fonction $\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a)$. Si, dans l'équation de définition (5), on change x en $x + i\mathrm{K}'$, on obtient une série qui peut être écrite de la façon suivante :

$$(10)\quad \chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}} e^{\frac{\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{(2n-1)\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}} q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \frac{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n-1}}{e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n-1}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$(11)\qquad \alpha = \frac{\pi(x-a)}{\mathrm{K}},\quad \gamma = \frac{\mu\pi a}{2\mathrm{K}}$$

et réunissons, dans la série (10), les termes qui correspondent à des valeurs de $(2n-1)$ égales et de signes contraires; nous aurons

$$(10')\quad \left\{\begin{aligned} &\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a)\\ &\quad = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}} e^{\gamma i} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \left(e^{(2n-1)\gamma i} \frac{e^{\alpha i} + q^{2n-1}}{e^{\alpha i} - q^{2n-1}} + e^{-(2n-1)\gamma i} \frac{e^{\alpha i} + q^{-(2n-1)}}{e^{\alpha i} - q^{-(2n-1)}}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose que le module de $e^{\alpha i}$ est compris entre les modules de q et $\frac{1}{q}$

$$|q| < |e^{\alpha i}| < \left|\frac{1}{q}\right|,$$

on a, pour toutes les valeurs positives de l'entier n,

$$\frac{e^{\alpha i} + q^{2n-1}}{e^{\alpha i} - q^{2n-1}} = \frac{1 + q^{2n-1}e^{-\alpha i}}{1 - q^{2n-1}e^{-\alpha i}} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{(2n-1)\nu} e^{-\nu\alpha i};$$

de même,

$$\frac{e^{\alpha i} + q^{-(2n-1)}}{e^{\alpha i} - q^{-(2n-1)}} = -\frac{1 + q^{2n-1}e^{\alpha i}}{1 - q^{2n-1}e^{\alpha i}} = -1 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{(2n-1)\nu} e^{\nu\alpha i}.$$

Portant ces développements dans le terme général de la série (10'),

on a

$$\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=\frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}}e^{\gamma i}\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\left(e^{(2n-1)\gamma i}-e^{-(2n-1)\gamma i}\right)$$

$$+\frac{\pi i}{2\mathrm{K}\sqrt[4]{q^\mu}}e^{\gamma i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\left(e^{(2n-1)\gamma i-\nu\alpha i}-e^{-(2n-1)\gamma i+\nu\alpha i}\right)$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\gamma i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)$$
$$=-\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\sin(2n-1)\gamma$$
$$-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin[(2n-1)\gamma-\nu\alpha];$$

ce que l'on peut écrire plus simplement

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\gamma i}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin[(2n-1)\gamma-\nu\alpha],$$

en convenant que dans les termes dans lesquels $\nu=0$ le coefficient 2 doit être remplacé par 1. On obtient ainsi, en remettant pour α et γ leurs valeurs (11), la série

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\frac{\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)\\&\quad=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}2q^{\mu\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2+(2n-1)\nu}\sin\left[\frac{\mu(2n-1)+2\nu}{2}\frac{\pi a}{\mathrm{K}}-\frac{\nu\pi x}{\mathrm{K}}\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de q

$$(13)\qquad\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}e^{-\frac{\mu\pi a i}{2\mathrm{K}}}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}',a)=-\sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}}\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(\mu)}(x,a),$$

quelle sera l'expression du coefficient $\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(\mu)}(x,a)$ de $q^{\frac{\mathrm{N}}{4}}$?

Tout d'abord, comme on a

$$\text{(14)} \qquad N = \mu(2n-1)^2 + 4(2n-1)\nu,$$

on voit que les exposants N, qui figurent dans le développement (13), sont des entiers positifs satisfaisant à la condition

$$\text{(15)} \qquad N \equiv \mu \pmod 4.$$

Soient alors N un entier vérifiant la condition (15) et δ un *diviseur impair* de N

$$N = \delta\delta', \quad (\delta \equiv 1, \bmod 2);$$

on aura, d'après (14),

$$\delta = (2n-1), \quad \delta' = \mu(2n-1) + 4\nu,$$

d'où

$$\nu = \frac{\delta' - \mu\delta}{4}, \quad \mu(2n-1) + 2\nu = \frac{\delta' + \mu\delta}{2};$$

il importe de remarquer que, pourvu que δ soit un diviseur impair de N, $\delta' - \mu\delta$ est divisible par 4, de sorte que ν est un entier pour toutes les combinaisons δ, δ'. De plus, comme ν doit être positif ou nul, δ est au plus égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$. On a donc

$$\text{(16)} \qquad B_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'}{}' 2 \sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{4}\,\frac{\pi a}{K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{4}\,\frac{\pi x}{K}\right),$$

la somme Σ' étant étendue à tous les couples de diviseurs de N dans lesquels δ est impair et au plus égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$, avec cette convention que le coefficient 2 du sinus doit être remplacé par 1 lorsque δ devient égal à $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$.

Pour montrer que, sous les suppositions qui ont été faites, $\frac{\delta' - \mu\delta}{4}$ est entier, écrivons les deux congruences

$$N \equiv \mu, \quad \mu\delta^2 \equiv \mu \pmod 4,$$

dont la seconde résulte de ce que δ est *impair;* on en conclut

$$N - \mu\delta^2 \equiv 0, \quad \delta(\delta' - \mu\delta) \equiv 0,$$

et enfin

$$\delta' - \mu\delta \equiv 0 \pmod 4.$$

6. Nous allons maintenant appliquer les formules précédentes à quelques cas particuliers. Supposons d'abord $\mu = 1$, et rappelons-nous que, d'après une formule démontrée dans mon premier Mémoire sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce (*Annales de l'École Normale*, 1884, p. 151), on a

$$\chi_1(x, \mathrm{K}) = \frac{\mathrm{H}'(0)}{i} \frac{e^{-\frac{\pi x i}{2\mathrm{K}}}}{\mathrm{H}_1(x)};$$

Changeant x en $x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, on a

$$\chi_1(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \mathrm{K}) = -\frac{i\mathrm{H}'(0)}{\sqrt[4]{q}} \frac{1}{\Theta(x)}. \tag{17}$$

Pour avoir le développement en série de $\frac{1}{\Theta(x)}$, il suffira de faire, dans la formule (13),

$$\mu = 1, \quad a = \mathrm{K},$$

et d'y remplacer x par $x + \mathrm{K}$. On a ainsi la formule

$$i\frac{\mathrm{K}}{\pi}\sqrt[4]{q}\,\chi_1(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \mathrm{K}) = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} \mathrm{B}_\mathrm{N}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K})$$

et par suite, d'après (17),

$$\frac{\mathrm{K}}{\pi}\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(x)} = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} \mathrm{B}_\mathrm{N}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}),$$

où le coefficient $\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K})$ est donné par l'équation (16)

$$\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}) = \sum_{\delta, \delta'}' 2 \sin\left[(\delta' + \delta)\frac{\pi}{4} - (\delta' - \delta)\frac{\pi}{4} - (\delta' - \delta)\frac{\pi x}{4\mathrm{K}}\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{B}_\mathrm{N}^{(1)}(x + \mathrm{K}, \mathrm{K}) = \sum_{\delta, \delta'}' 2(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \cos(\delta' - \delta)\frac{\pi x}{4\mathrm{K}},$$

expression qui est d'accord avec celle que donne M. Biehler à la page 106

de sa Thèse pour le développement $\frac{1}{\Theta(x)}$. On a, en effet, en adoptant les notations que M. Biehler emprunte à M. Hermite,

$$\frac{K}{\pi} H'(0) = \tfrac{1}{2}\,\Theta\Theta_1\eta_1.$$

7. La fonction de y

$$\chi_\mu(iK', y)$$

admet, dans un parallélogramme des périodes, un seul pôle $y = iK'$ avec le résidu -1 et $(\mu+1)$ zéros, parmi lesquels se trouvent, quel que soit μ, les points $y = 0$, $y = K + iK'$; on vérifie que ces points sont bien des zéros de la fonction en faisant, dans la formule (8),

$$x = 0, \quad a = K,$$

ce qui donne

$$\chi_\mu(iK', K + iK') = 0,$$

et, dans la formule (12),

$$x = 0, \quad a = 0,$$

ce qui donne

$$\chi_\mu(iK', 0) = 0.$$

Cette remarque faite, supposons d'abord $\mu = 1$. La fonction

$$\chi_1(iK', y)$$

admet alors, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle iK' et les deux seuls zéros $y = 0$, $y = K + iK'$; de plus, elle vérifie les deux équations

$$\chi_1(iK', y + 2K) = \chi_1(iK', y),$$

$$\chi_1(iK', y + 2iK') = e^{-\frac{\pi y i}{K}} \chi_1(iK', y);$$

mais la fonction

$$e^{\frac{\pi y i}{2K}} \frac{H(y)\Theta_1(y)}{\Theta(y)}$$

admet les mêmes zéros, les mêmes infinis, et vérifie les mêmes relations. On a donc

$$\chi_1(iK', y) = Ce^{\frac{\pi y i}{2K}} \frac{H(y)\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

C étant une constante que nous allons déterminer par la condition que le résidu relatif au pôle $y = iK'$ est égal à -1. Pour cela, faisons

$$y = z + iK',$$

la formule précédente donne

$$\chi_1(iK', z + iK') = C\sqrt[4]{q}\,\frac{\Theta(z)\,H_1(z)}{H(z)};$$

le résidu du deuxième membre relatif au pôle $z = 0$ devant être -1, on a

$$C = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{H'(0)}{\Theta(0)\,H_1(0)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{\pi}{2K}},$$

car

$$H'(0) = \sqrt{k}\,\Theta(0), \quad H_1(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

On obtient ainsi les deux formules

$$\chi_1(iK', y) = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\,e^{\frac{\pi y i}{2K}}\,\frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)}, \tag{18}$$

$$\chi_1(iK', z + iK') = -\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\,\frac{\Theta(z)\,H_1(z)}{H(z)}. \tag{18'}$$

D'après cela, la formule (13), dans laquelle on fait $x = 0$, $\mu = 1$ et $a = y$ donne le développement de

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{H(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

et la formule (9), dans laquelle on fait les mêmes substitutions, donne celui de

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{\Theta(y)\,H_1(y)}{H(y)}.$$

On retrouve ainsi les développements en série indiqués par M. Hermite, qui ont été le point de départ des recherches de M. Biehler, et qu'il est inutile de reproduire ici.

On obtiendrait de même des formules données par M. Biehler, en remarquant que la fonction de y

$$\chi_2(iK', y)$$

admet, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $y = i\mathrm{K}'$ avec le résidu -1 et les trois zéros

$$y = 0, \quad y = \mathrm{K}, \quad y = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'.$$

On conclut de là

$$\chi_2(i\mathrm{K}', y) = \mathrm{D}e^{-\frac{\pi y i}{\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(y)\,\mathrm{H}_1(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

D étant une constante déterminée par la condition que le résidu relatif au pôle $y = i\mathrm{K}'$ est égal à -1. En faisant, comme plus haut, $y = z + i\mathrm{K}'$, la formule précédente donne

$$\chi_2(i\mathrm{K}', z + i\mathrm{K}') = \mathrm{D}\sqrt[4]{q}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)};$$

en écrivant que le résidu relatif à $z = 0$ est -1, on trouve

$$\mathrm{D} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Les formules (9) et (13), dans lesquelles on fait $x = 0$, $\mu = 2$ et $a = y$ donneront alors les développements des deux fonctions

$$\frac{\mathrm{H}_1(y)\,\Theta(y)\,\Theta_1(y)}{\mathrm{H}(y)}, \quad \frac{\mathrm{H}(y)\,\mathrm{H}_1(y)\,\Theta_1(y)}{\Theta(y)},$$

tels qu'ils ont été indiqués par M. Biehler.

8. Enfin, comme dernier exemple, considérons la fonction

$$(19) \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{\pi x i}{\mathrm{K}}}\,\mathrm{H}(2a)\,\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}(x+a)},$$

qui vérifie les deux équations

$$\mathrm{F}(x + 2\mathrm{K}) = \mathrm{F}(x), \quad \mathrm{F}(x + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{2\pi x i}{\mathrm{K}}}\,\mathrm{F}(x).$$

Cette fonction devient infinie aux points homologues des deux points

$$x = a, \quad x = -a,$$

et les résidus correspondants sont

$$\frac{K}{\pi}e^{-\frac{\pi a i}{K}}, \quad -\frac{K}{\pi}e^{\frac{\pi a i}{K}}.$$

On a donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples appliquée au cas actuel où $\mu = 2$,

$$F(x) = \frac{K}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi a i}{K}}\chi_2(x, a) - e^{\frac{\pi a i}{K}}\chi_2(x, -a)\right].$$

Changeons, dans cette formule, x en $x + iK'$, et remarquons que

$$(20) \qquad F(x + iK') = -\frac{1}{\sqrt[2]{q}}\,\frac{K}{\pi}\,\frac{H(2a)\,H'(0)}{\Theta(x-a)\,\Theta(x+a)},$$

nous aurons

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{K}{\pi}\,\frac{H(2a)\,H'(0)}{\Theta(x-a)\,\Theta(x+a)} \\ &\quad = -\frac{K}{\pi}\sqrt[2]{q}\,e^{\frac{\pi a i}{K}}\chi_2(x + iK', a) + \frac{K}{\pi}\sqrt[2]{q}\,e^{-\frac{\pi a i}{K}}\chi_2(x + iK', -a). \end{aligned}\right.$$

En appliquant la formule (13), dans laquelle on fait $\mu = 2$, on obtient immédiatement le développement en série de chacun des termes du second membre, et l'on trouve ainsi

$$(22) \qquad \frac{K}{\pi}\,\frac{H(2a)\,H'(0)}{\Theta(x-a)\,\Theta(x+a)} = \sum_1^\infty q^{\frac{N}{4}}\left[B_N^{(2)}(x, a) - B_N^{(2)}(x, -a)\right].$$

Le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$ est donc, d'après (16),

$$\sum_{\delta,\delta'}{}'\left[2\sin\left(\frac{\delta'+2\delta}{4}\,\frac{\pi a}{K} - \frac{\delta'-2\delta}{4}\,\frac{\pi x}{K}\right) + 2\sin\left(\frac{\delta'+2\delta}{4}\,\frac{\pi a}{K} + \frac{\delta'-2\delta}{4}\,\frac{\pi x}{K}\right)\right]$$

ou enfin

$$\sum_{\delta,\delta'}{}' 4\sin\frac{\delta'+2\delta}{4}\,\frac{\pi a}{K}\cos\frac{\delta'-2\delta}{4}\,\frac{\pi x}{K},$$

où il faut, d'après une convention antérieure, remplacer le coefficient 4 par 2 dans les termes de la somme dans lesquels $\delta' - 2\delta = 0$ (1).

(1) *Voyez*, pour une formule analogue, une Note de M. Kronecker, *Monatsbericht der Akademie zu Berlin*, décembre 1881.

En changeant, dans la formule (21), a en $a + i\mathrm{K}'$, on obtiendrait une nouvelle formule dont on pourrait développer le second membre d'après la formule (9); mais je laisse ce calcul de côté pour examiner ce que donne la relation (22) quand a tend vers zéro. Divisant les deux membres par a et faisant tendre a vers zéro, on obtient la formule

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\Theta^2(x)} = \sum_1^\infty q^{\frac{\mathrm{N}}{4}} b_\mathrm{N}, \tag{23}$$

où b_N a pour valeur

$$b_\mathrm{N} = \sum_{\delta,\,\delta'}{}' \frac{\pi}{\mathrm{K}}(\delta' + 2\delta)\cos\frac{\delta' - 2\delta}{4}\frac{\pi x}{\mathrm{K}},$$

le cosinus devant être affecté du coefficient $\frac{1}{2}$ quand $\delta' - 2\delta = 0$.

9. Pour achever le tableau complet de ces formules, il reste à former les développements de $\chi_\mu(x, a)$ et $\chi_\mu(x, a + i\mathrm{K}')$. Nous arriverons aux formules cherchées en faisant une transformation importante dont deux cas particuliers ont déjà été signalés aux pages 17 et 19 et qui, dans les formules de M. Biehler, permet de passer du développement d'une fonction d'un groupe à celui des trois autres. Cette transformation nous a été suggérée par la méthode qu'emploie M. Hermite dans les *Collectanea mathematica*, etc., pour tirer des développements de $\frac{1}{\Theta(x)}$ et $\frac{1}{\mathrm{H}(x)}$ les propriétés fondamentales de ces fonctions.

En multipliant les deux membres de la série (5) par $e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}}$, on obtient la formule

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}'),$$

qui peut être écrite

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) = \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} e^{\mu\alpha i} \cot\alpha \tag{24}$$

en faisant

$$\alpha = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}'). \tag{25}$$

Pour transformer le terme général de cette série (24), nous distinguerons deux cas suivant que μ est pair ou impair.

Soit d'abord μ pair. Alors on a identiquement

$$e^{\mu\alpha i}\cot\alpha = \cot\alpha + i(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{2\alpha i} + 1);$$

en remplaçant, dans (24), $e^{\mu\alpha i}\cot\alpha$ par cette valeur, on obtient

$$(24')\quad \begin{cases} \dfrac{2K}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} \chi_\mu(x, a) \\ \quad = \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2}\cot\alpha + i\sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2}(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + \ldots + 2e^{2\alpha i} + 1). \end{cases}$$

La première série qui figure dans le second membre est, d'après (5'), la fonction $\frac{2K}{\pi}\chi_\mu(x + iK', a + iK')$; quant à la deuxième série, elle se partage en $\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)$ séries qui sont, en remettant pour α sa valeur (25) :

$$\begin{aligned} \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2} e^{\mu\alpha i} &= e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} g_0^{(\mu)}(a), \\ 2\sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2} e^{(\mu-2)\alpha i} &= 2e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{2\pi x i}{2K}} g_1^{(\mu)}(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2\sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2} e^{(\mu-2\nu)\alpha i} &= 2e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2K}} g_\nu^{(\mu)}(a), \\ \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{K}} q^{\mu n^2} &= e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2K}} e^{-\frac{\mu\pi x i}{2K}} g_{\frac{\mu}{2}}^{(\mu)}(a), \end{aligned}$$

les fonctions $g_\nu^{(\mu)}$ étant celles que j'ai définies dans mon premier Mémoire par les équations (4), page 138. D'après ces notations, la formule (24') donne pour ce cas (μ pair)

$$(26)\quad \begin{cases} \chi_\mu(x, a) = e^{\frac{\mu\pi(a-x)i}{2K}} \chi_\mu(x + iK', a + iK') \\ \qquad + \dfrac{\pi i}{2K}\Big[g_0^{(\mu)}(a) + 2e^{-\frac{2\pi x i}{2K}} g_1^{(\mu)}(a) + \ldots \\ \qquad\qquad + 2e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2K}} g_\nu^{(\mu)}(a) + \ldots + e^{-\frac{\mu\pi x i}{2K}} g_{\frac{\mu}{2}}^{(\mu)}(a) \Big]; \end{cases}$$

formule qui ramène le développement de $\chi_\mu(x, a)$ à celui de $\chi_\mu(x + i\mathrm{K}', a + i\mathrm{K}')$ indiqué précédemment (n° 4).

Passons maintenant au cas où μ est *impair;* dans ce cas, l'on transformera le terme général de la série (24) à l'aide de l'identité

$$(27)\qquad e^{\mu\alpha i}\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + i(e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{\alpha i});$$

ce qui donne

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\mathrm{K}}{\pi} e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}} \chi_\mu(x, a) \\ &\quad = \sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin\alpha} \\ &\quad + i\sum e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} [e^{\mu\alpha i} + 2e^{(\mu-2)\alpha i} + 2e^{(\mu-4)\alpha i} + \ldots + 2e^{\alpha i}]. \end{aligned}\right.$$

La première série qui figure dans le second membre définit une fonction des variables x et a

$$(29)\qquad \omega_\mu(x, a) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - a - 2ni\mathrm{K}')};$$

quant à la deuxième série, elle se partage en $\frac{\mu+1}{2}$ séries qui sont respectivement égales au produit de $e^{\frac{\mu\pi(x-a)i}{2\mathrm{K}}}$ par les fonctions

$$g_0^{(\mu)}(a),\quad 2e^{-\frac{2\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_1^{(\mu)}(a),\quad \ldots,\quad 2e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_\nu^{(\mu)}(a),\quad \ldots,\quad 2e^{-\frac{(\mu-1)\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_{\frac{\mu-1}{2}}^{(\mu)}(a).$$

La formule (28) donne donc, pour le cas de μ impair,

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \chi_\mu(x, a) = \omega_\mu(x, a) + \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \Big[& g_0^{(\mu)}(a) + e^{-\frac{2\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_1^{(\mu)}(a) + \ldots \\ & + 2e^{-\frac{2\nu\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_\nu^{(\mu)}(a) + 2e^{-\frac{(\mu-1)\pi x i}{2\mathrm{K}}} g_{\frac{\mu-1}{2}}^{(\mu)}(a) \Big], \end{aligned}\right.$$

formule qui ramène le développement de $\chi_\mu(x, a)$ à celui de $\omega_\mu(x, a)$.

Si, dans ces formules (26) et (30), on change a en $a+i\mathrm{K}'$ et si l'on se rappelle que

$$\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a+2i\mathrm{K}') = e^{-\frac{\mu\pi a i}{\mathrm{K}}}\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a),$$

on voit que, quand μ est pair, le développement de $\chi_\mu(x, a+i\mathrm{K}')$ est ramené à celui de $\chi_\mu(x+i\mathrm{K}', a)$ qui a été effectué dans le n° 5, et, quand μ est impair, ce développement se ramène à celui de la fonction

$$(31)\quad \omega_\mu(x, a+i\mathrm{K}') = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n+1)} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[x-a-(2n+1)i\mathrm{K}']}.$$

10. Il nous reste donc à développer en série, suivant les puissances de q, les deux fonctions (29) et (31), dont la première, pour le cas de $\mu = 1$, se trouve écrite avec d'autres notations au bas de la page 4 de l'article de M. Hermite dans les *Collectanea mathematica*, etc.

Écrivons la série (29) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\omega_\mu(x, a) = {}& \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-a)}\\ &+\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\mu n^2}\left[\frac{e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-a-2ni\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-a+2ni\mathrm{K}')}\right],\end{aligned}$$

puis développons la quantité entre crochets suivant les puissances de q; nous obtenons, sous les conditions $|q^2| < \left|e^{\frac{\pi(x-a)i}{\mathrm{K}}}\right| < \left|\frac{1}{q^2}\right|$,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{e^{\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-a-2ni\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{\mu n\pi a i}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-a+2ni\mathrm{K}')}\\ &\quad = -4\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{n\nu}\sin\left[(2\mu n+\nu)\frac{\pi a}{2\mathrm{K}} - \nu\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\right],\end{aligned}\right.$$

où ν prend toutes les valeurs *impaires* de 1 à $+\infty$. On aura donc

$$(33)\quad \frac{2K}{\pi}\omega_\mu(x,a)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a)}-4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}q^{\mu n^2+n\nu}\sin\left[(2\mu n+\nu)\frac{\pi a}{2K}-\nu\frac{\pi x}{2K}\right];$$

d'où l'on conclut que, si l'on fait

$$\frac{2K}{\pi}\omega_\mu(x,a)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a)}-4\sum_{N}q^{N}C_N^{(\mu)}(x,a),$$

on a, pour le coefficient $C_N^{(\mu)}(x,a)$, l'expression

$$C_N^{(\mu)}(x,a)=\sum_{\delta,\delta'}''\sin\left[(\delta'+\delta\mu)\frac{\pi a}{2K}-(\delta'-\delta\mu)\frac{\pi x}{2K}\right],$$

la somme Σ'' étant étendue à tous les diviseurs conjugués δ et δ' de N, pour lesquels $\delta'-\delta\mu$ est un entier *positif impair*.

Écrivons de même la série (31) sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}\,e^{\frac{\mu\pi a i}{2K}}\omega_\mu(x,a+i'K')\\&=\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{\mu\frac{m^2}{4}}\left[\frac{e^{\frac{\mu m\pi a i}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a-miK')}+\frac{e^{-\frac{\mu m\pi a i}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a+miK')}\right],\end{aligned}$$

où

$$m=2n+1.$$

Le coefficient de $q^{\mu\frac{m^2}{4}}$ ne diffère du terme (32) qu'en ce que n est remplacé par $\frac{m}{2}$; on aura donc immédiatement, d'après (33),

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{q^\mu}\,e^{\frac{\mu\pi a i}{2K}}\omega_\mu(x,a+iK')\\&=-4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}q^{\frac{\mu m^2+2m\nu}{4}}\sin\left[(\mu m+\nu)\frac{\pi a}{2K}-\nu\frac{\pi x}{2K}\right],\end{aligned}\right.$$

$$|q|<\left|e^{\frac{\pi(x-a)i}{K}}\right|<\left|\frac{1}{q}\right|,$$

où m et ν prennent toutes les valeurs positives impaires. Si l'on ordonne le second membre suivant les puissances de q, les exposants de q sont de la forme $\frac{N}{4}$, où

$$N \equiv \mu + 2 \pmod 4, \tag{35}$$

et, sous cette condition (35), le coefficient de $q^{\frac{N}{4}}$, dans la série du second membre de (34), sera

$$E_N^{(\mu)}(x, a) = \sum_{\delta, \delta'}'''\sin\left(\frac{\delta' + \mu\delta}{2}\frac{\pi a}{2K} - \frac{\delta' - \mu\delta}{2}\frac{\pi x}{2K}\right),$$

la somme Σ''' étant étendue à tous les systèmes de diviseurs conjugués δ et δ' de N dans lesquels δ est impair et moindre que $\sqrt{\frac{N}{\mu}}$.

On se trouve ainsi en possession de méthodes et de formules générales permettant de trouver facilement et rapidement les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et comprenant comme cas particuliers les formules, si précieuses pour l'Arithmétique, que M. Biehler a établies dans son intéressant travail en suivant la voie ouverte par M. Hermite.

SUR LES

TRANSFORMATIONS RATIONNELLES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. E. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Dans un article inséré aux *Mathematische Annalen* (Band XXIV) et dans un Mémoire développé qui paraitra prochainement dans les *Acta Societatis Fennicæ*, je me suis proposé d'étudier les intégrales rationnelles de l'équation du troisième ordre, due à M. Kummer, qui se présente dans l'étude de la transformation des séries hypergéométriques. Le problème d'Algèbre auquel on est conduit offre plus d'une analogie avec le problème célèbre de la transformation des intégrales elliptiques, tel qu'il a été traité dans toute sa généralité par Jacobi au début des *Fundamenta nova*. Les deux questions ne sont, d'ailleurs, que des cas particuliers d'un problème très général relatif aux transformations rationnelles des équations différentielles linéaires, et ce problème comprend aussi toutes les questions que l'on peut se proposer sur la réduction des intégrales ultra-elliptiques au moyen de substitutions rationnelles. C'est l'étude de ce problème général qui fait l'objet du présent Mémoire. Je m'attache surtout à montrer comment la question dépend de la recherche des solutions en nombres entiers et positifs de certaines équations indéterminées. Une fois ces systèmes de solutions connus, la détermination effective des substitutions rationnelles exige l'emploi de calculs par la méthode des coefficients indéterminés, calculs qui peuvent être très compliqués, mais il ne semble pas qu'on puisse s'en affranchir d'une manière générale. Comme application, je

montre comment on peut toujours ramener à une question d'élimination le problème suivant : *Une équation linéaire du second ordre étant* DONNÉE, *reconnaître si son intégrale générale est une fonction algébrique.*

Pour fixer les idées et abréger les raisonnements, j'ai constamment supposé que les équations linéaires étaient du second ordre, mais il est visible que la méthode reste la même, quel que soit l'ordre de ces équations.

I.

1. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, je commencerai par établir un lemme dont nous aurons besoin par la suite.

Soit $x=\varphi(t)$ une fonction rationnelle quelconque d'une variable t, et désignons en général par $\mathrm{P}(t-\alpha)$ une fonction rationnelle qui n'est ni nulle, ni infinie pour $t=\alpha$, $t-\infty$ devant être remplacé par $\frac{1}{t}$. Soient a et α deux quantités finies; d'après la théorie des racines égales, on peut dire que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=a$, si l'on a

$$x-a=(t-\alpha)^m\,\mathrm{P}(t-\alpha).$$

On dira de même que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$ ou que $t=\infty$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=a$, si l'on a dans le premier cas

$$\frac{1}{x}=(t-\alpha)^m\,\mathrm{P}(t-\alpha)$$

et dans le second cas

$$x-a=\left(\frac{1}{t}\right)^m\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Enfin $t=\infty$ sera racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$, si l'on a

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{t}\right)^m\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Supposons que l'on fasse à la fois sur x et sur t une substitution linéaire

$$x=\frac{\mathrm{AX}+\mathrm{B}}{\mathrm{CX}+\mathrm{D}},\quad t=\frac{\mathrm{A'T}+\mathrm{B'}}{\mathrm{C'T}+\mathrm{D'}};$$

si t_0 est racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=x_0$, en appelant

X_0 et T_0 les valeurs correspondantes de X et de T, T_0 sera dans tous les cas racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi\left(\frac{A'T+B'}{C'T+D'}\right)=X_0$. Par exemple, si $\varphi(t)$ se réduit à un polynôme entier d'ordre m, $t=\infty$ devra être regardé comme une racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=\infty$.

Imaginons que l'on considère toutes les valeurs de x pour lesquelles l'équation $\varphi(t)=x$ a des racines multiples, finies ou infinies, et soit r l'ordre de multiplicité de l'une quelconque de ces racines. Si le degré de la fonction $\varphi(t)$ est égal à n, on a la formule absolument générale

$$\Sigma(r-1)=2n-2, \tag{1}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines multiples, finies ou infinies, de l'équation $\varphi(t)=x$, pour toutes les valeurs de x. D'après ce qui précède, on peut toujours supposer que l'équation $\varphi(t)=\infty$ admet la racine simple $t=\infty$ et $n-1$ autres racines simples. Si ces conditions n'étaient pas remplies, on n'aurait qu'à considérer une valeur finie x_0 pour laquelle l'équation $\varphi(t)=x_0$ ait n racines simples finies $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, et à faire les substitutions linéaires

$$x=x_0+\frac{1}{X}, \quad t=t_0+\frac{1}{T},$$

qui ne changent ni le degré n, ni la somme $\Sigma(r-1)$. On pourra donc toujours supposer la fonction rationnelle $\varphi(t)$ mise sous la forme

$$x=\varphi(t)=\frac{P}{Q},$$

P et Q étant des polynômes sans facteurs communs, le premier de degré n, le second de degré $n-1$, et le second n'ayant que des facteurs simples. Grâce aux substitutions précédentes, l'équation $\varphi(t)=a$ ne pourra avoir de racines multiples que pour des valeurs finies de a et ces racines multiples auront elles-mêmes des valeurs finies. De l'équation précédente, on tire

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2},$$

et le numérateur est un polynôme de degré $2n-2$ n'ayant aucune

racine commune avec le dénominateur. Si $t=\alpha$ est une racine d'ordre $r-1$ de l'équation $P'Q-PQ'=0$ et a la valeur correspondante de x, on voit facilement que $t=\alpha$ sera racine multiple d'ordre r de l'équation $\varphi(t)=a$; et réciproquement, si $t=\alpha$ est racine multiple d'ordre r de l'équation $P-aQ=0$, $t=\alpha$ sera racine multiple d'ordre $r-1$ de l'équation $PQ'-QP'=0$, comme cela résulte de l'identité

$$P'Q-Q'P=(P'-aQ')Q-Q'(P-aQ).$$

On en déduit précisément la formule (1) qui est, par suite, absolument générale.

On peut établir cette formule autrement. Considérons la fonction algébrique t de x définie par l'équation $\varphi(t)=x$, et la surface de Riemann correspondante, qui se composera de n feuillets, si $\varphi(t)$ est de degré n. Les points de ramification de cette surface correspondent aux valeurs de x pour lesquelles plusieurs valeurs de t deviennent égales, c'est-à-dire aux valeurs telles que l'équation $\varphi(t)=a$ ait des racines multiples. Or, d'après la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine, on reconnaît immédiatement qu'à une racine multiple d'ordre r correspond toujours un point de ramification d'ordre $r-1$. La formule générale, qui donne le genre d'une relation algébrique

$$\frac{\Sigma(r-1)}{2}-(n-1)=p,$$

devient ici, puisque $p=0$,

$$\Sigma(r-1)=2n-2,$$

c'est-à-dire la formule (1).

2. Soient

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+P\frac{dz}{dt}+Qz=0 \tag{3}$$

deux équations linéaires du second ordre, où p et q sont des fonctions

de x, P et Q des fonctions de t. On peut toujours, comme il est bien connu, passer de l'équation (2) à l'équation (3) en posant

$$x = \varphi(t), \quad z = wy,$$

φ et w étant des fonctions convenablement choisies de t; on n'aura, en effet, que deux conditions à remplir et l'on dispose de deux fonctions arbitraires φ et w. Ces fonctions seront déterminées par les équations simultanées

$$(4) \qquad px' - \frac{x''}{x'} = 2\frac{w'}{w} + \mathrm{P},$$

$$(5) \qquad qx'^2 = \frac{w''}{w} + \mathrm{P}\frac{w'}{w} + \mathrm{Q},$$

et l'élimination de w conduit à une équation du troisième ordre pour déterminer la fonction inconnue $x = \varphi(t)$

$$(6) \qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \left(2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}\right)x'^2 = 2\mathrm{Q} - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 - \frac{d\mathrm{P}}{dt},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$x' = \frac{d\varphi}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad x''' = \frac{d^3\varphi}{dt^3}.$$

L'équation de Kummer est un cas particulier de l'équation (6), que l'on obtient en supposant que les équations proposées (2) et (3) se réduisent à deux équations hypergéométriques. Dans ce qui va suivre, je supposerai que p et q sont des fonctions rationnelles de x, P et Q des fonctions rationnelles de t, et, de plus, que les équations (2) et (3) ont toutes leurs intégrales régulières; je me propose de montrer comment on peut étendre à l'étude des intégrales rationnelles de l'équation (6) les considérations dont je me suis déjà servi dans le cas particulier de l'équation de Kummer, et cela sans autre difficulté nouvelle que la complication des calculs.

Je remarque en premier lieu que, si l'équation (6) admet pour intégrale une fonction rationnelle de t, l'équation (4) donnera pour la valeur correspondante de $\frac{w'}{w}$ une fonction rationnelle, et il est aisé de

vérifier que w sera de la forme

$$w = \prod_{i=1}^{i=k} (t - t_k)^{r_k}; \tag{7}$$

l'intégration de l'équation (3) sera donc ramenée à l'intégration de l'équation (2) ou inversement.

3. Un point ordinaire a d'une équation linéaire du second ordre, telle que l'équation (2), peut être caractérisé par la propriété suivante : dans le domaine de ce point, l'équation admet deux intégrales particulières distinctes de la forme suivante :

$$y_1 = 1 + \alpha_0(x-a) + \alpha_1(x-a)^2 + \ldots,$$
$$y_2 = (x-a) + \beta_1(x-a)^2 + \ldots.$$

Il résulte des expressions de p et de q au moyen des intégrales y_1, y_2, que ces coefficients sont holomorphes dans le voisinage du point a. Inversement, si p et q sont holomorphes pour $x = a$, le théorème fondamental de M. Fuchs nous apprend que le point a sera un point ordinaire. Tout point non ordinaire est un point singulier; j'emploierai la classification suivante, qui est basée principalement sur la différence δ des racines de l'équation déterminante fondamentale relative à ce point.

1° δ n'est pas un nombre entier, ou bien, δ étant un nombre entier, l'intégrale générale contient un logarithme dans le domaine du point considéré; je réserverai aux valeurs de la variable de cette nature le nom de *points véritablement singuliers* ou, plus simplement, de *points singuliers*. J'appellerai a_1, a_2, ..., a_p les points singuliers de cette espèce de l'équation (2), que je suppose en nombre p.

2° δ est un nombre entier supérieur à l'unité, sans que l'intégrale générale contienne de logarithme dans le voisinage de ce point. Je donnerai aux points de cette nature le nom de points *à apparence singulière,* et je désignerai par la lettre b un quelconque des points de cette espèce de l'équation (2).

3° δ est égal à l'unité, sans que l'intégrale générale contienne de

tenant à des exposants dont la différence est égale à une certaine quantité δ, différente de zéro; la nouvelle équation admettra, dans le domaine du point $t = \alpha$, deux intégrales appartenant à des exposants dont la différence sera $m\delta$. On aura à distinguer plusieurs cas :

1° *Le point a est un point ordinaire :* On a alors

$$\delta = 1, \quad m\delta = m;$$

le point α sera un point ordinaire si $m = 1$, et un point à apparence singulière si $m > 1$.

2° *Le point a est un point à apparence singulière :* Dans ce cas, δ sera un nombre entier supérieur à l'unité et, à plus forte raison, $m\delta$. Le point $t = \alpha$ sera *toujours* un point à apparence singulière.

3° *Le point a est un point véritablement singulier, et δ est imaginaire ou incommensurable :* Alors $m\delta$ sera lui-même imaginaire ou incommensurable, et le point $t = \alpha$ sera *toujours* un point véritablement singulier.

4° *Le point a est un point véritablement singulier, et δ est commensurable :* Supposons-le réduit à sa plus simple expression, $\delta = \frac{\lambda}{\mu}$; si m n'est pas un multiple de μ, $\frac{\lambda m}{\mu}$ sera fractionnaire et la valeur $t = \alpha$ sera un point véritablement singulier. Mais, si m est égal à μ ou à un multiple d μ, $\frac{\lambda m}{\mu}$ sera un nombre entier, et $t = \alpha$ sera un point à apparence singulière ou même un point ordinaire; cette dernière circonstance ne pouvant se présenter que si l'on a à la fois

$$\lambda = 1, \quad m = \mu.$$

En résumé, les points singuliers non apparents de la nouvelle équation proviennent : 1° des valeurs de t correspondant aux points singuliers logarithmiques de la première équation; 2° des valeurs de t correspondant aux points singuliers pour lesquels δ est imaginaire ou incommensurable; 3° des valeurs de t correspondant aux points singuliers pour lesquels δ est commensurable, sans que l'ordre de multiplicité de la racine soit un multiple du dénominateur de δ, supposé réduit à sa plus simple expression.

degré n_i. Il sera facile de passer de ce cas général aux autres cas particuliers. On voit, par conséquent, que, si une fonction $\varphi(t)$ répond à la question, elle jouit des propriétés suivantes :

Les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$, qui n'ont aucune des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, doivent être racines d'un ordre de multiplicité égal à μ_i ou à un multiple de μ_i.

Il faut de plus que, dans certains cas que nous avons spécifiés, toutes les racines aient l'une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Inversement, il résulte de l'étude qui vient d'être faite que ces conditions nécessaires sont suffisantes. Si l'on veut, en outre, que l'équation (3) obtenue par le changement de variable $x = \varphi(t)$ ne présente pas de points à apparence singulière, il y aura un certain nombre de conditions à remplir : 1° l'équation proposée (2) ne devra pas avoir de points singuliers apparents; 2° toute équation $\varphi(t) = A$, où A n'a aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne devra avoir que des racines simples; 3° les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$ devront toutes avoir une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, si ce point est un point singulier logarithmique ou si δ_i n'est pas l'inverse d'un nombre entier; 4° si δ_i est l'inverse d'un nombre entier μ_i, les racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$, qui n'ont aucune des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, devront être racines multiples d'ordre μ_i; 5° si α_h est racine d'ordre h d'une équation $\varphi(t) = a_i$, où δ_i est une fraction ayant pour dénominateur μ_i et un numérateur > 1, h ne devra pas être égal à μ_i ni à un multiple de μ_i; sans quoi le point α_h ne serait pas un point singulier.

5. Revenant au cas général, je désigne par D le degré de la fraction rationnelle $\varphi(t)$, par N_i la somme $\sum_{k=1}^{k=q} r_i^k$, et par V_i le nombre des facteurs linéaires distincts qui figurent dans Π_i; comme chaque facteur $t - \alpha_k$ figure dans un des produits Π_i et dans un seul, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=p} V_i = q.$$

Entre les différents nombres qui viennent d'être définis on a d'abord

les relations évidentes

$$(9)\qquad D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = \ldots = N_i + n_i\mu_i = \ldots = N_p + n_p\mu_p,$$

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} N_i \geqq q.$$

La formule (1) établie plus haut fournit une autre relation; dans $\Sigma(r-1)$ les termes qui proviennent du facteur Π_i ont pour somme $N_i - V_i$ et la somme des termes analogues sera

$$\sum_{i=1}^{i=p} N_i - \sum_{i=1}^{i=p} V_i = \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q.$$

De même, le terme qui provient des racines de l'équation $\varphi(t) = a_i$, communes avec l'équation $P_i = 0$, sera, en supposant toutes ces racines simples, $n_i(\mu_i - 1)$ et aura une valeur plus grande si l'équation $P_i = 0$ a des racines multiples, comme il est aisé de s'en assurer par un calcul facile. La somme des termes analogues sera donc au moins égale à

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i(\mu_i - 1).$$

Enfin, la somme $\Sigma(r-1)$ pourra contenir d'autres termes provenant des racines multiples de l'équation $\varphi(t) = A$, s'il en existe pour d'autres valeurs de A; de sorte que l'on aura, en général, d'après la formule (1),

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} n_i(\mu_i - 1) + \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q + \Delta = 2D - 2.$$

Δ désigne un nombre entier positif qui sera nul si tous les polynômes P_i n'ont que des facteurs simples, et si l'équation $\varphi(t) = A$ n'a que des racines simples, tant que A n'a pas l'une des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et dans ce cas seulement. En particulier, on voit que Δ sera toujours nul, si l'équation (3) n'a pas de points à apparence singulière.

L'équation (2) étant donnée, les équations (9), (10), (11) contiennent les indéterminées D, Δ, $N_1, N_2, \ldots, N_p$ et certains des nombres n_i, ceux

pour lesquels la valeur correspondante de δ_i est commensurable. Les autres doivent être supposés nuls, comme on l'a expliqué plus haut.

Pour traiter le cas particulier où l'on suppose que les équations (2) et (3) n'ont pas de points singuliers apparents, on devra faire $\Delta = 0$, et supposer nuls tous les nombres n_i pour lesquels le nombre correspondant δ_i n'est pas l'inverse d'un nombre entier.

Toute fonction rationnelle répondant à la question fournit évidemment une solution des équations précédentes en nombres entiers et positifs. Inversement supposons que l'on connaisse une solution de ces équations en nombres entiers et positifs; connaissant les nombres N_i, on pourra déterminer les nombres r_i^k par les relations

$$N_i = \sum_{k=1}^{k=q} r_i^k, \tag{12}$$

et, d'après l'équation (10), on pourra déterminer ces nombres r_i^k de façon que chaque facteur $t - \alpha_k$ figure dans un produit Π_i et dans un seul, et cela d'un nombre limité de manières. Les nombres n_i et r_i^k étant ainsi déterminés, supposons que l'on veuille calculer la fonction $\varphi(t)$ par la méthode des coefficients indéterminés. Les équations (8) fournissent $p - 2$ identités de degré D en t et par suite $(p-2)(D+1)$ équations de condition; or, dans ces identités, on dispose des q arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et des coefficients des polynômes P_i. Comme on peut toujours supposer un de ces coefficients égal à l'unité, le nombre total des paramètres arbitraires sera

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i + p + q - 1.$$

Or l'équation (11) peut s'écrire, en tenant compte des relations (9),

$$pD - \sum_{i=1}^{i=p} n_i - q + \Delta = 2D - 2$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=p} n_i + p + q - 1 = (p-2)(D+1) + \Delta + 3, \tag{13}$$

et cette nouvelle formule exprime précisément que le nombre des coefficients indéterminés surpasse le nombre des équations de condition de $\Delta + 3$ unités. On en déduira donc, en général, une fonction rationnelle répondant à la question et renfermant $\Delta + 3$ paramètres arbitraires.

Je considérerai toutes ces fonctions rationnelles comme appartenant à un même *type*. Comme à tout système de solutions des équations (9), (10), (11) correspond un nombre limité de solutions pour les équations (12), on arrive aux conclusions suivantes :

A tout système de solutions des équations (9), (10), (11) *correspondent en général une infinité de fonctions rationnelles répondant à la question, qui appartiennent à un nombre limite de types distincts.*

Chacun de ces types contient le même nombre $(\Delta + 3)$ *de paramètres arbitraires.*

Pour achever de déterminer le problème, on pourra se proposer de disposer de ces $\Delta + 3$ paramètres, de façon que $\Delta + 3$ des quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$ aient des valeurs données à l'avance si $\Delta + 3 \leqq q$.

Pour passer du cas général au cas particulier de l'équation de Kummer, il faudra faire $p = q = 3$, $\Delta = 0$; on retrouve ainsi un système d'équations équivalent à celui que j'avais obtenu directement (voir *Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 450). Chaque solution contiendra trois paramètres arbitraires dont on pourra disposer de façon que les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ coïncident avec les trois points 0, 1, ∞, et le problème devient alors complètement déterminé, comme je l'ai déjà établi dans le travail cité tout à l'heure.

6. On voit par là le rôle important que jouent, dans le problème dont je m'occupe, les équations (9), (10), (11); dans toute application de ce problème, on devra commencer par rechercher les solutions de ces équations en nombres entiers et positifs. On peut déduire de ces relations d'autres formules susceptibles d'interprétations intéressantes. Ainsi des équations (9) on tire

$$D = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{i=p} n_i \mu_i + \sum_{i=1}^{i=p} N_i\right),$$

et, en remplaçant D par cette valeur dans l'équation (9), il vient

$$(14)\quad \sum_{i=1}^{i=p}[p(\mu_i-1)-2\mu_i]\,n_i+(p-2)\left(\sum_{i=1}^{i=p}\mathrm{N}_i-q\right)=2(q-p)-\Delta p.$$

Supposons p supérieur à 4; le premier membre de la formule précédente ne peut être négatif, et il ne sera nul que si chaque terme est séparément nul, c'est-à-dire si l'on a $n_i=0$, $\mathrm{N}_i=1$. Par conséquent le second membre ne peut être que positif ou nul; on en déduit qu'on ne peut avoir $q<p$, et l'on n'aura $q=p$ que si l'on a en même temps $\Delta=0, n_i=0, \mathrm{N}_i=1$, et la substitution sera du premier degré. Ainsi :

Lorsque le nombre des points singuliers non apparents de la première équation linéaire est supérieur à quatre, le nombre des points singuliers non apparents de la seconde équation ne peut être inférieur au nombre des points singuliers de la première, et, s'il lui est égal, elles se déduisent l'une de l'autre par une substitution linéaire.

Si $p=4$, le premier membre de l'équation (14) ne peut pas non plus être négatif; donc on ne peut avoir $q<p$; mais on pourra avoir $p=q$ si $\Delta=0$ et si le premier membre est nul, ce qui aura lieu si l'on a

$$n_i=0,\quad \mathrm{N}_i=1,$$

c'est-à-dire dans le cas d'une substitution linéaire et, en outre, si l'on a

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=2,\quad \sum_{i=1}^{i=4}\mathrm{N}_i=4.$$

Dans ce dernier cas, la détermination de la fonction $\varphi(t)$ revient précisément au problème traité par Jacobi au début des *Fundamenta nova*. Ainsi :

Lorsque le nombre des points singuliers non apparents de la première équation est égal à quatre, le nombre des points singuliers de la nouvelle équation ne peut être inférieur à quatre et, s'il est égal à quatre, la transformation est linéaire ou est une transformation de Jacobi.

Dans ce cas particulier, l'équation (2) aura quatre points singuliers non apparents, et la différence δ relative à ces quatre points sera com-

mensurable et, réduite à sa plus simple expression, aura pour dénominateur 2. Telle est l'équation de Lamé et l'équation plus générale de M. Darboux (*Comptes rendus*, juin 1882); l'intégrale générale de ces deux équations s'exprime, comme on sait, au moyen des fonctions θ de Jacobi. Il en serait encore de même si l'on ajoutait aux quatre points singuliers non apparents un nombre quelconque de points à apparence singulière. Il suffit, pour le voir, de se reporter à un petit travail que j'ai publié dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XII, p. 97).

Nous avons en même temps le résultat suivant :

Les seules transformations rationnelles, telles que les équations (2) *et* (3) *aient le même nombre de points singuliers non apparents, sont les transformations de Jacobi et les transformations qui résultent des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer.*

On voit, en outre, qu'on ne pourra avoir $q < p$ que si $p = 3$, et l'on retrouve précisément les quatre types d'équations hypergéométriques qui s'intègrent algébriquement.

Je laisse de côté le cas singulier de $p = 2$.

7. L'équation (2) étant donnée, ainsi que le nombre entier q, il est très important de rechercher si les équations (9), (10) et (11) admettent un nombre limité ou une infinité de solutions. Des équations (9), je tire

$$n_i = \frac{N_p - N_i + n_p \mu_p}{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$
$$D = N_p + n_p \mu_p;$$

l'équation (11) peut alors s'écrire

$$n_p(\mu_p - 1) + \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(N_p - N_i + n_p \mu_p) + \sum_{i=1}^{i=p} N_i - q + \Delta = 2N_p + 2n_p\mu_p - 2$$

ou bien

$$(15)\quad \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{N_i}{\mu_i} + N_p\left(p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p-1} \frac{1}{\mu_i}\right) + n_p\mu_p\left(p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}\right) + \Delta = q - 2.$$

Plusieurs cas sont à distinguer suivant le signe du coefficient de $n_p \mu_p$.

Premier cas. — Supposons ce coefficient négatif : le premier membre de l'équation aura à la fois des termes positifs et des termes négatifs, et cette formule ne nous fournit aucune limite pour les nombres N_i et n_i. Or la quantité $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ ne peut être négative que dans les quatre cas suivants :

$p = 3.$	$\mu_1.$	$\mu_2.$	$\mu_3.$
....	2	2	n
....	2	3	3
....	2	3	4
....	2	3	5

qui correspondent aux quatre types d'équations hypergéométriques s'intégrant algébriquement. Dans chacun de ces cas, les équations (9), (10), (11) admettent, en effet, une infinité de solutions, quel que soit q. Il n'y a de limites ni pour les nombres n_i, ni pour les nombres N_i.

Deuxième cas. — Supposons $p - 2 = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$; ceci aura lieu dans quatre cas seulement :

$p.$	$\mu_1.$	$\mu_2.$	$\mu_3.$	$\mu_4.$
4	2	2	2	2
3	2	4	4	.
3	2	3	6	.
3	3	3	3	.

Dans chacun de ces quatre cas, l'intégrale générale de l'équation proposée s'exprime au moyen de fonctions doublement périodiques de première ou de seconde espèce. Les équations (9), (10), (11) admettent une infinité de solutions, pourvu que q ne soit pas inférieur à p. Il n'y a pas de limite pour les nombres n_i ; mais l'équation (15) se réduit ici à

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{N_i}{\mu_i} - 2 = q - 1,$$

et l'on voit que les nombres N_i n'admettent qu'un nombre limité de valeurs.

Troisième cas. — Supposons, ce qui est le cas général, $p - 2 > \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$. Tous les termes du premier membre de l'équation (15) seront positifs, et, comme le second membre a une valeur déterminée, il en résulte que tous les nombres $N_1, N_2, \ldots, N_p, n_p$ devront être inférieurs à une limite déterminée. Comme il existe $p - 1$ équations analogues où l'on aurait remplacé successivement l'indice p par $p - 1$, $p - 2, \ldots, 1$, on verrait de même que les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ doivent tous rester inférieurs à certaines limites, et, par suite, les équations (9), (10), (11) admettent un nombre limité de systèmes de solutions en nombres entiers et positifs. Il suit de là que *toutes les substitutions rationnelles permettent de passer de l'équation proposée à une équation ayant un nombre déterminé q de points singuliers non apparents appartiennent à un nombre limité de types différents.*

On peut aller plus loin et regarder dans les équations (9), (10), (11) tous les nombres N_i, n_i, μ_i, D, Δ comme indéterminés, p et q seulement étant donnés. Si on laisse systématiquement de côté les cas qui pourraient se présenter où la somme $\sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ pourrait être égale ou supérieure à $p - 2$, le coefficient $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i}$ restera supérieur à une limite déterminée; par exemple, si $p > 4$, ce coefficient sera supérieur à $\frac{p}{2} - 2$; si $p = 4$, il sera supérieur à $\frac{1}{6}$; si $p = 3$, il sera supérieur à $\frac{1}{42}$. Donc, d'après l'équation (15), tous les nombres $N_1, N_2, \ldots, N_p, \Delta, n_p \mu_p$ devront rester inférieurs à une certaine limite, et l'on démontrerait qu'il en est de même des produits $n_1 \mu_1, \ldots, n_{p-1} \mu_{p-1}$. Par suite, les nombres n_i et μ_i auront eux-mêmes une limite; il y aurait exception pour le nombre entier μ_i, si l'on supposait $n_i = 0$; mais on sait que, dans ce cas, le nombre μ_i ne figure pas dans les équations.

Il y aura donc un nombre *fini* de solutions pour les équations (9), (10), (11), et l'on arrive à cette conclusion que, abstraction faite des huit cas particuliers énumérés plus haut, *toutes les substitutions rationnelles conduisant d'une équation qui a p points singuliers non apparents à une équation qui en a q appartiennent à un nombre limité de types distincts.*

Cette conclusion est tout à fait analogue, comme on le voit, à celle que j'avais obtenue pour l'équation de Kummer, mais beaucoup plus générale.

8. Les principes précédents conduisent sans peine à la solution de ce problème : *Les équations* (2) *et* (3) *étant données, reconnaître si elles peuvent se déduire l'une de l'autre par une substitution rationnelle.*

Les explications données plus haut nous dispensent d'entrer dans un grand nombre de détails. On reconnaît d'abord qu'un certain nombre de conditions préalables doivent être remplies : l'équation (3) doit avoir au moins autant de points singuliers logarithmiques et de points à apparence singulière que l'équation (2); la différence δ_k relative à un point critique α_k doit être multiple d'une des différences δ_i relative à un point critique a_i, ... Ces conditions étant supposées remplies, les nombre N_1, N_2, ..., N_p auront un nombre limité de systèmes de valeurs positives. Quant à Δ, on obtiendra comme il suit la valeur de ce nombre ou du moins une limite supérieure. Si l'équation (3) n'a pas de points à apparence singulière, l'équation (2) ne pourra pas non plus en avoir, et l'on aura

$$\Delta = 0,$$

comme on l'a vu plus haut. Si les deux équations ont des points à apparence singulière, nous désignerons par Δ_1 et Δ_2 les différences des exposants de discontinuité des intégrales de la première et de la seconde équation dans le domaine d'un de ces points, par A_1, et A_2 le nombre des points à apparence singulière des deux équations. Dans le cas où $A_1 = 0$, on trouve aisément

$$\Delta = \Sigma\Delta_2 - A_2;$$

mais, si A_1 n'est pas nul, on a les deux inégalités

$$D\,\Sigma\,\Delta_1 \leqq \Sigma\Delta_2, \quad \Delta \leqq A_1 D + \Sigma\Delta_2 - A_2,$$

qui fournissent à la fois des limites pour D et Δ, et il est aisé, dans chaque cas particulier, d'obtenir des limites beaucoup moins élevées par d'autres considérations. Quoi qu'il en soit, une fois qu'on aura choisi un système de valeurs admissibles pour les nombres N_i et Δ,

l'équation (15) et les équations analogues donneront les valeurs des nombres n_i, pourvu que l'on n'ait pas

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i} = p - 2.$$

Écartons d'abord cette hypothèse; les valeurs que l'on trouve pour les nombres n_i devront être entières et positives, ou nulles dans certains cas.

On aura donc tous les éléments nécessaires pour effectuer le calcul, et l'on voit que la question se ramène dans tous les cas à un nombre limité d'essais.

Les calculs pourront sans doute être très compliqués, mais il me suffit pour le moment d'avoir montré que le problème est susceptible d'une solution complète. J'étudie plus spécialement ci-dessous le cas où $p - 2 - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i} < 0$, qui présente un intérêt particulier.

Il en est tout autrement dans les quatre cas où l'on a

$$p - 2 = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{\mu_i};$$

l'équation (15) ne nous donne plus les valeurs de n_i, et il peut y avoir une infinité de solutions des équations (9), (10), (11). Il est aisé de se rendre compte de cette circonstance par un exemple; si l'on cherche toutes les fonctions rationnelles $x = \varphi(t)$ vérifiant une équation de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{g\,dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}},$$

on sait que, pour un degré donné n de $\varphi(t)$, il devra y avoir une relation algébrique entre k^2 et k'^2. Si k^2 et k'^2 sont donnés, on pourra vérifier si cette relation est vérifiée ou non pour $n = 2, 3, 5, \ldots$; mais, aussi loin qu'on aille dans la série des essais, on ne pourra jamais affirmer que la transformation n'est pas possible par cette seule considération des équations modulaires.

Le problème qui nous occupe dans ces quatre cas particuliers est

lié à la réduction des intégrales abéliennes, et je me propose d'y revenir dans un autre travail.

II.

9. Pour donner un exemple de discussion du système des équations (9), (10), (11), je me propose d'étudier ici le cas de $p=3$, $q=4$, qui peut être regardé comme le plus simple après celui de $p=q=3$.

J'observe d'abord que, dans le cas particulier en question, les équations (9), (10) et (11) sont équivalentes aux suivantes :

$$D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = N_3 + n_3\mu_3, \tag{16}$$

$$N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4, \tag{17}$$

$$n_1(\mu_1 - 2) + n_2(\mu_2 - 2) + N_1 + N_2 = 2n_3 + 4 - 2\Delta; \tag{18}$$

l'équation (18) s'obtient en remplaçant, dans l'équation (11), $D - \sum_{i=1}^{i=3} n_i$ par la valeur $2 - \Delta$ tirée de la formule (13). La discussion comprend plusieurs cas.

Premier cas. — Soit $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. La seule solution est

$$N_1 = N_2 = N_3 = 2, \quad D = 2, \quad \Delta = 0.$$

La substitution correspondante sera du second degré, et l'on peut prendre comme type de cette substitution $x = t^2$; si les points singuliers de la première équation sont, comme nous le supposons toujours, 0, 1, ∞, ceux de la seconde équation seront 0, 1, -1, ∞; μ_1, μ_2, μ_3 sont arbitraires.

Deuxième cas. — Soient $n_2 = n_3 = 0$, $n_1 \neq 0$. Les équations deviennent

$$D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 = N_3, \quad N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4, \quad 2N_1 + 2n_1(\mu_1 - 1) = 4 - 2\Delta;$$

elles admettent les systèmes de solutions suivants :

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.	Δ.
2	»	»	1	0	0	1	3	3	3	0
2	»	»	2	0	0	0	4	4	4	0
3	»	»	1	0	0	0	3	3	3	0
2	»	»	1	0	0	0	2	2	2	1

On peut prendre comme types de substitutions correspondantes les substitutions ci-dessous :

$$x = \frac{t(4t-3)^2}{(t-1)(4t-1)^2}, \tag{19}$$

$$x = \frac{(t^2-6t+1)^2}{(t+1)^4}, \tag{20}$$

$$x = \frac{(8t^2-36t+27)^2}{(9-8t)^3}, \tag{21}$$

$$x = \frac{(2t^2-2t+1)^2}{(2t-1)^2}, \tag{22}$$

$$x = \frac{(t-\alpha)^2}{t(t-1)}. \tag{23}$$

Troisième cas. — Soient $n_3 = 0$, $n_1 n_2 \neq 0$. Les équations deviennent

$$\begin{gathered} D = N_1 + n_1\mu_1 = N_2 + n_2\mu_2 = N_3, \\ n_1(\mu_1 - 2) + n_2(\mu_2 - 2) + N_1 + N_2 = 4 - 2\Delta, \\ N_1 + N_2 + N_3 \geqq 4. \end{gathered}$$

Les substitutions correspondantes peuvent se déduire des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. En effet, toute fonction rationnelle provenant d'un système de solutions du système précédent donnera lieu à une identité de la forme

$$\Pi_1 P_1^{\mu_1} - \Pi_2 P_2^{\mu_2} = \Pi_3,$$

où Π_i est de la forme

$$(t-\alpha_1)^{r_i^1}(t-\alpha_2)^{r_i^2}(t-\alpha_3)^{r_i^3}(t-\alpha_4)^{r_i^4}.$$

Prenons, par exemple,

$$\Pi_3 = (t-\alpha_1)^{m_1}(t-\alpha_2)^{m_2}(t-\alpha_3)^{m_3}(t-\alpha_4)^{m_4};$$

supposons m_4 supérieur à l'unité. Par une substitution linéaire convenable, on pourra remplacer α_1, α_2, α_3 par les valeurs 0, 1, ∞ et l'on aura précisément une de ces identités d'où se déduisent les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. La réciproque est aisée à démontrer.

Quatrième cas. — Soit $n_1 n_2 n_3 \neq 0$. On a encore plusieurs hypothèses à examiner, suivant le signe de $1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3}$.

Dans les quatre cas où la somme $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$ est supérieure à l'unité, les équations (16), (17), (18) admettent une infinité de systèmes de solutions; il n'y a aucune limite, ni pour les nombres n_i ni pour les nombres N_i.

Dans les trois cas où la somme $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$ est égale à l'unité, il y a encore une infinité de solutions, toutes comprises dans les suivantes, où h désigne un nombre entier positif arbitraire :

$$\Delta = 0.$$

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.
3	3	3	h	h	h	2	2	2	$3h+2$
»	»	»	h	$h+2$	$h+2$	6	0	0	$3h+6$
2	4	4	$2h+4$	$h+2$	h	0	0	8	$4h+8$
»	»	»	$2h+3$	$h+1$	h	0	2	6	$4h+6$
»	»	»	$2h+2$	h	h	0	4	4	$4h+4$
»	»	»	$2h+2$	$h+1$	h	1	1	5	$4h+5$
»	»	»	$2h+1$	h	h	1	3	3	$4h+3$
»	»	»	$2h+1$	$h+1$	h	2	0	4	$4h+4$
»	»	»	$2h$	h	h	2	2	2	$4h+2$
»	»	»	$2h-2$	h	h	4	0	0	$4h$
2	3	6	$3h+6$	$2h+4$	h	0	0	12	$6h+12$
»	»	»	$3h+5$	$2h+3$	h	0	1	10	$6h+10$
»	»	»	$3h+4$	$2h+2$	h	0	2	8	$6h+8$
»	»	»	$3h+3$	$2h+1$	h	0	3	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+2$	$2h$	h	0	4	4	$6h+4$
»	»	»	$3h+1$	$2h-1$	h	0	5	2	$6h+2$
»	»	»	$3h$	$2h-2$	h	0	6	0	$6h$
»	»	»	$3h+4$	$2h+3$	h	1	0	9	$6h+9$
»	»	»	$3h+3$	$2h+2$	h	1	1	7	$6h+7$
»	»	»	$3h+2$	$2h+1$	h	1	2	5	$6h+5$
»	»	»	$3h+1$	$2h$	h	1	3	3	$6h+3$
»	»	»	$3h$	$2h-1$	h	1	4	1	$6h+1$
»	»	»	$3h+2$	$2h+2$	h	2	0	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+1$	$2h+1$	h	2	1	4	$6h+4$
»	»	»	$3h$	$2h$	h	2	2	2	$6h+2$
»	»	»	$3h-1$	$2h-1$	h	2	3	0	$6h$
»	»	»	$3h$	$2h+1$	h	3	0	3	$6h+3$
»	»	»	$3h-1$	$2h$	h	3	1	1	$6h+1$
»	»	»	$3h-2$	$2h$	h	4	0	0	$6h$

$\Delta = 1.$

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.
2	3	6	$3h+3$	$2h+2$	h	0	0	6	$6h+6$
»	»	»	$3h+2$	$2h+1$	h	0	1	4	$6h+4$
»	»	»	$3h+1$	$2h$	h	0	2	2	$6h+2$
»	»	»	$3h+1$	$2h+1$	h	1	0	3	$6h+3$

A chacune de ces solutions correspond une infinité de différentielles de la forme

$$\frac{dt}{(t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}(t-\alpha_3)^{\lambda_3}(t-\alpha_4)^{\lambda_4}},$$

qui se ramènent par un changement de variable à des différentielles elliptiques.

Si l'on suppose $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} < 1$, on n'a qu'un nombre limité de solutions, où aucun des nombres μ_1, μ_2, μ_3 ne peut dépasser 14. Le nombre Δ ne peut être supérieur à l'unité; il ne pourra donc prendre que les deux valeurs $\Delta = 0$ et $\Delta = 1$. Je citerai comme exemples les solutions suivantes :

μ_1.	μ_2.	μ_3.	n_1.	n_2.	n_3.	N_1.	N_2.	N_3.	D.	Δ.
2	3	14	9	6	1	0	0	4	18	0
2	3	13	9	6	1	0	0	5	18	0
2	3	13	8	5	1	0	1	3	16	0
2	3	12	9	6	1	0	0	6	18	0
2	3	12	8	5	1	0	1	4	16	0

. . . .

III.

10. Une application importante des précédentes recherches est relative à l'étude des intégrales algébriques des équations linéaires du second ordre. On sait, en effet, d'après un beau résultat dû à M. Klein (*Société de Physique d'Erlangen*, juin 1876), que l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{dy}{dt} + Qy = 0, \tag{24}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de t, aura son intégrale

algébrique si les deux conditions suivantes, qui sont d'ailleurs nécessaires, sont remplies : 1° $e^{\int P\,dt}$ est une fonction algébrique de t; 2° l'équation du troisième ordre

$$(25)\quad \frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2+\frac{(1-\nu^2)x^2+(\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1)x+1-\lambda^2}{2x^2(x-1)^2}x'^2=2Q-\frac{1}{2}P^2-\frac{dP}{dt},$$

où λ, μ, ν ont l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

λ.	μ.	ν.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

admet pour intégrale une fonction rationnelle de t.

Laissant de côté la première condition que nous supposons remplie, proposons-nous de voir comment on pourra reconnaître si la seconde l'est également. Le problème qu'il s'agit de résoudre est évidemment un cas particulier du problème général dont il a été question plus haut, et l'on obtient ce cas particulier en supposant que l'équation (2) est une des quatre équations hypergéométriques dont l'intégrale générale est algébrique et pour lesquelles λ, μ, ν ont un des systèmes de valeurs ci-dessus.

Pour fixer les idées, je suppose que l'on prenne

$$\lambda=\tfrac{1}{2},\quad \mu=\tfrac{1}{3},\quad \nu=\tfrac{1}{5};$$

l'équation (24) ne devra pas avoir de point singulier logarithmique, et la différence des exposants de discontinuité relative à un point critique non apparent sera un nombre commensurable qui, réduit à sa plus simple expression, aura pour dénominateur l'un des nombres 2, 3, 5. Supposons qu'il existe une fonction rationnelle $\varphi(t)$ répondant à la question. Soit $t=\alpha$ un point singulier non apparent de l'équation (24) et δ la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale relative à ce point. Si δ est de la forme $\frac{m}{2}$, on en conclura que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=0$; de même, si l'on a $\delta=\frac{m}{3}$ ou $\delta=\frac{m}{5}$, on en conclura que $t=\alpha$ est racine d'ordre m de l'équa-

tion $\varphi(t) = 1$ ou de l'équation $\varphi(t) = \infty$. C'est ce qui résulte bien clairement du n° 4. On partagera, d'après cela, les points singuliers non apparents de l'équation (24) en trois groupes, suivant que le dénominateur de δ est l'un des nombres 2, 3, 5. Je désignerai par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les points singuliers du premier groupe, et par $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_h}{2}$ les valeurs correspondantes de δ; par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ les points du second groupe, et par $\frac{\mu_1}{3}, \frac{\mu_2}{3}, \ldots, \frac{\mu_i}{3}$ les valeurs correspondantes de δ; enfin par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ les points du troisième groupe et par $\frac{\nu_1}{5}, \frac{\nu_2}{5}, \ldots, \frac{\nu_k}{5}$ les valeurs correspondantes de δ. Je suppose que tous ces points singuliers sont à distance finie; ce qu'on peut toujours réaliser par un changement linéaire de variable. Posons

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= (t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(t-\alpha_h)^{\lambda_h},\\
\Pi_2 &= (t-\beta_1)^{\mu_1}(t-\beta_2)^{\mu_2}\ldots(t-\beta_i)^{\mu_i},\\
\Pi_3 &= (t-\gamma_1)^{\nu_1}(t-\gamma_2)^{\nu_2}\ldots(t-\gamma_k)^{\nu_k},\\
N_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_h,\\
N_2 &= \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i,\\
N_3 &= \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k.
\end{aligned}$$

S'il existe une fonction rationnelle $x = \varphi(t)$ vérifiant l'équation (25), on aura les deux expressions

$$x = \frac{\Pi_1 P^2}{\Pi_3 R^5}, \quad x - 1 = \frac{\Pi_2 Q^3}{\Pi_3 R^5};$$

ce qui donnera lieu à l'identité

$$\Pi_1 P^2 - \Pi_2 Q^3 = \Pi_3 R^5, \tag{26}$$

P, Q, R étant trois fonctions entières de degrés inconnus pour le moment.

Soient n_1, n_2, n_3 ces degrés; les équations générales (9) et (11) deviennent ici

$$D = N_1 + 2n_1 = N_2 + 3n_2 = N_3 + 5n_3, \tag{27}$$

$$n_1 + 2n_2 + 4n_3 + N_1 + N_2 + N_3 - (h+i+k) + \Delta = 2D - 2, \tag{28}$$

et ces équations résolues nous donnent pour n_1, n_2, n_3 les valeurs suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} -\frac{n_1}{15}+7\frac{N_1}{15}+\frac{N_2}{3}+\frac{N_3}{5}+\Delta=(h+i+k)-2, \\ -\frac{n_2}{10}+\frac{N_1}{2}+\frac{3N_2}{10}+\frac{N_3}{5}+\Delta=(h+i+k)-2, \\ -\frac{n_3}{6}+\frac{N_1}{2}+\frac{N_2}{3}+\frac{N_3}{6}+\Delta=(h+i+k)-2. \end{cases}$$

Ces formules ne contiennent d'indéterminé que le nombre Δ. Bornons-nous d'abord au cas le plus simple, celui où l'équation (24) n'a pas de points singuliers apparents. On aura alors forcément, d'après ce qu'on a vu, $\Delta = 0$, et les équations (29) nous donnent sans aucune ambiguïté les valeurs de n_1, n_2, n_3. Si les valeurs ainsi obtenues ne sont pas toutes des nombres entiers positifs, il est inutile de continuer le calcul, et l'on pourra affirmer que l'équation (25) n'admet pas d'intégrale rationnelle. Si l'on trouve ainsi pour n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs (pouvant être nuls), on aura tous les éléments nécessaires au calcul de l'identité (26). Le nombre d'équations de condition fournies par cette identité est égal à $D+1$ et l'on dispose de $n_1+n_2+n_3+2$ coefficients indéterminés. Or des équations (27) et (28) on déduit sans peine, en supposant $\Delta = 0$,

$$n_1+n_2+n_3+2 = D+4-(h+i+k);$$

le nombre des coefficients indéterminés est donc inférieur au nombre des équations de condition et la différence est $h+i+k-3$, nombre positif, sauf dans le cas où l'équation (24) elle-même serait une équation hypergéométrique. Dans ce cas, qui a été traité si complètement par M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 75), on connaît, d'après le Tableau donné par ce géomètre, les valeurs admissibles pour N_1, N_2, N_3 et la méthode précédente fournit un procédé de calcul régulier pour trouver l'intégrale elle-même. Si $h+i+k$ est supérieur à trois, l'identité (26) ne pourra avoir lieu que si les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \ldots, \beta_i, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ satisfont à certaines conditions. La détermination de ces équations de condition est un problème d'élimination, qui n'offre que des difficultés algébriques. Si ces équations de condition ne sont pas

remplies, l'équation (25) n'admettra pas d'intégrale rationnelle. Si elles sont remplies, on en déduira une identité de la forme (26) et une fonction rationnelle $\varphi(t)$ qui est la seule pouvant répondre à la question. Il restera à vérifier si elle satisfait ou non à l'équation (25).

11. Si l'équation (24) a des points singuliers apparents, Δ ne pourra être nul, mais il est aisé d'avoir la valeur de ce nombre. Soient b un point singulier apparent de cette équation (24) et Δ' la différence des exposants auxquels appartiennent les intégrales dans le domaine de ce point; $t = b$ pourra être racine d'ordre Δ' d'une équation telle que $\varphi(t) = a$, où a est différent de 0, 1, ∞, ou bien racine de l'une des équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = \infty$ au degré de multiplicité $2\Delta'$, $3\Delta'$, $5\Delta'$ respectivement.

Si l'on se reporte à la signification de Δ, on voit que le terme qui provient de la racine multiple $t = b$ sera dans tous les cas $\Delta' - 1$.

En faisant la somme de tous les termes analogues et en désignant par A le nombre des points singuliers apparents de l'équation (24), on trouve

$$\Delta = \Sigma\Delta' - A.$$

On peut, par conséquent, partager les points singuliers apparents de l'équation (24) en plusieurs groupes, suivant que l'on suppose que la valeur correspondante de x est différente de 0, 1, ∞ ou a l'une de ces valeurs.

Ce partage peut être effectué de plusieurs manières, mais le nombre des hypothèses possibles est évidemment limité. Adoptons une de ces hypothèses en particulier; la valeur de Δ est connue, et les équations (29) fourniront les valeurs des nombres entiers n_1, n_2, n_3. On sera encore ramené au calcul d'une identité telle que (26); mais aux équations de condition provenant de cette identité il faudra ajouter d'autres conditions qui expriment que les polynômes P, Q, R contiennent certains facteurs linéaires ou bien que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet, outre les racines des trois équations $\Pi_1 P = 0$, $\Pi_2 Q = 0$, $\Pi_3 R = 0$, certaines racines à des degrés de multiplicité déterminés. On reconnait facilement que le nombre des équations de condition est supérieur à celui des inconnues, si $h + i + k$ est supérieur à trois. Le reste du calcul s'achèvera comme plus haut.

12. Les détails dans lesquels nous sommes entrés pour le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{5}$ nous dispensent d'insister beaucoup sur les deux autres cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{3}$ ou $\nu = \frac{1}{4}$. Il y a, cependant, une complication spéciale relative à ces deux cas que l'on saisira facilement. Ainsi, dans le second cas, si la différence δ relative à un point singulier non apparent α est de la forme $\frac{m}{2}$, on pourra faire les deux hypothèses suivantes : $t = \alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 0$, ou bien $t = \alpha$ est racine d'ordre $2m$ de l'équation $\varphi(t) = \infty$. De même, dans le premier cas, si la différence δ, relative à un point singulier non apparent α, est de la forme $\frac{m}{3}$, on pourra supposer indifféremment que $t = \alpha$ est racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 1$ ou de l'équation $\varphi(t) = \infty$. Une difficulté analogue se présente pour les points singuliers apparents; mais le nombre des combinaisons possibles est toujours limité, et il suffira d'essayer successivement chacune de ces combinaisons comme il a été expliqué tout à l'heure.

On pourrait étudier de la même manière l'équation (25) en supposant $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{n}$. Mais il est à remarquer qu'aussi loin que l'on pousse les essais, en prenant successivement pour n les nombres entiers 2, 3, 4, 5, ..., on ne pourra jamais affirmer sans d'autres considérations que l'intégrale générale de l'équation (24) n'est pas algébrique. Il paraît donc préférable d'employer la méthode suivante. L'équation hypergéométrique que l'on obtient en prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{n}$ est la suivante

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4n^2} = 0; \tag{30}$$

elle admet les deux intégrales particulières distinctes

$$y_1 = (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{\frac{1}{n}},$$
$$y_2 = (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{\frac{1}{n}},$$

dont le produit est égal à l'unité. Par conséquent, si dans l'équa-

tion (30) on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$, et qu'on multiplie toutes les intégrales de la nouvelle équation par un facteur de la forme (7), le produit des intégrales correspondant à y_1 et à y_2 aura une différentielle logarithmique rationnelle. Donc, si l'équation (25) admet une intégrale rationnelle pour une valeur convenable de ν, en supposant $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, l'équation linéaire du troisième ordre, qui est vérifiée par le produit de deux intégrales quelconques de (24), admettra une intégrale particulière de la forme (7). Comme il est facile de déterminer *a priori* des valeurs limites pour les exposants qui y figurent, ainsi que pour leur somme, on voit qu'on pourra toujours reconnaître s'il en est ainsi par un nombre *fini* d'essais. S'il arrive que l'on trouve pour une intégrale particulière une expression de la forme W, on commencera par multiplier toutes les intégrales de l'équation (24) par un facteur de même nature, de façon que le produit de deux intégrales particulières de la nouvelle équation soit un polynôme entier entre t, $R(t)$. Cela fait, l'intégration de la nouvelle équation se ramènera à des quadratures (*voir* Hermite, *Annali di Matematica*, t. IX, 2e série).

Soit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + p\frac{dz}{dt} + qz = 0$$

l'équation dont il s'agit, telle que le produit de deux intégrales particulières distinctes z_1, z_2 soit un polynôme $R(t)$. Admettons que l'équation a une intégrale holomorphe dans le domaine de chaque point critique; on aura

$$p = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

et il est aisé de démontrer que $e^{-\int p\,dt}$ sera de la forme

$$e^{-\int p\,dt} = \frac{F(t)}{\sqrt{f(t)}},$$

F et f étant des fonctions rationnelles de t. Cela posé, des équations

$$z_1 z_2 = R(t),$$

$$z_1\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dz_1}{dt} = Ce^{-\int p\,dt} = \frac{C\,F(t)}{\sqrt{f(t)}},$$

on tire

$$z_1 = \sqrt{R(t)}\, e^{\int \frac{C F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}} dt},$$

$$z_2 = \sqrt{R(t)}\, e^{-\int \frac{C F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}} dt},$$

et la question se ramène à rechercher si l'intégrale

$$\int \frac{F(t)}{R(t)\sqrt{f(t)}}\, dt$$

est égale au logarithme d'une fonction algébrique. Cette question a donné lieu à un grand nombre de recherches, en particulier à des recherches d'Abel et de M. Tchebycheff. Je renverrai à leurs Mémoires pour ce qui concerne cette dernière question.

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. MITTAG-LEFFLER

AUX

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Les applications du théorème de M. Mittag-Leffler à des fonctions connues sont encore peu nombreuses. Dans celles que M. Weierstrass a indiquées pour les fonctions elliptiques, par exemple dans la formule

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}=\sum\left[\frac{1}{x+2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'}-\frac{1}{2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'}-\frac{x}{(2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}')^2}\right],$$

le polynôme retranché de la partie principale est du premier degré. M. Hermite, dans une Lettre à M. Mittag-Leffler insérée au Tome 92, page 145 du *Journal de Crelle*, a donné des exemples, obtenus par des combinaisons de fonctions eulériennes, dans lesquels il faut retrancher des fractions simples un polynôme de degré limité mais quelconque. Enfin, dans son *Cours à la Faculté des Sciences* ([1]), M. Hermite a considéré d'autres combinaisons de fonctions eulériennes pour lesquelles le degré du polynôme à retrancher de chaque fraction simple est proportionnel au rang de cette fraction dans la série et, par suite, croît au delà de toute limite.

Voici une nouvelle application du même théorème, dans laquelle les degrés des polynômes que l'on retranche de la partie principale

([1]) Cours de M. Hermite, rédigé par M. Audoyer; Hermann, éditeur.

croissent indéfiniment; cette application est relative aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce obtenues, comme l'on sait, en divisant un produit de fonctions Θ par un autre produit de même forme; je m'attacherai surtout au cas, le seul intéressant, où il y a plus de Θ au numérateur qu'au dénominateur.

I. Soit $F(x)$ une fonction uniforme de x vérifiant les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x+2K) = F(x), \\ F(x+2iK') = \lambda e^{-\frac{\mu\pi x i}{K}} F(x), \end{cases}$$

λ désignant un facteur constant quelconque et μ un entier *positif*. Supposons que cette fonction admette un pôle simple $x = \alpha$ avec le résidu A; elle admettra tous les pôles

$$(2)\qquad \alpha + 2mK + 2niK', \quad (m \text{ et } n \text{ entiers})$$

avec les résidus respectifs

$$(3)\qquad A\lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)},$$

ainsi qu'il résulte de l'équation

$$F(x+2niK') = \lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi x i}{K}} q^{-\mu n(n-1)} F(x).$$

Nous allons nous proposer de former une fonction uniforme qui admette les pôles simples (2) avec les résidus (3); nous pouvons évidemment supposer $A = \frac{2K}{\pi}$, car cela revient à diviser la fonction cherchée par $\frac{\pi A}{2K}$. La question à résoudre est alors la suivante :

Soient les fonctions

$$(4)\qquad \varphi_n(x) = \lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'),$$

où

$$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm\infty;$$

former une fonction uniforme $\Phi(x)$ *admettant pour pôles les points* (2) *de telle façon que la différence*

$$\Phi(x) - \varphi_n(x)$$

soit holomorphe dans le voisinage de chacun des points

$$\alpha + 2mK + 2niK',$$

où

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty.$$

La série

$$\sum \varphi_n(x)$$

est divergente, car le module du terme général augmente indéfiniment. En suivant la méthode de M. Mittag-Leffler, nous allons retrancher de chaque fonction $\varphi_n(x)$ un polynôme $g_n(x)$ en $\cos\frac{\pi x}{K}$ et $\sin\frac{\pi x}{K}$ choisi de telle façon que la série

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varphi_n(x) - g_n(x)]$$

soit absolument convergente. Cette série définira une fonction $\Phi(x)$ satisfaisant aux conditions du problème; la fonction la plus générale satisfaisant à ces conditions sera $\Phi(x)$ augmentée d'une fonction entière $G(x)$.

On peut écrire

$$(5)\qquad \cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK') = i\,\frac{e^{\frac{\pi i(x-\alpha)}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi i(x-\alpha)}{K}} - q^{2n}};$$

d'autre part, quels que soient a et b, on a identiquement

$$(6)\qquad \frac{a+b}{a-b} = 1 + 2\frac{b}{a} + 2\frac{b^2}{a^2} + \ldots + 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\rho-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\rho} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\rho}\frac{a+b}{a-b}.$$

Supposons d'abord *n positif* et appliquons l'identité (6) en y faisant

$$a = e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}, \quad b = q^{2n}, \quad \rho = \rho_n;$$

nous aurons

$$\cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK') = i\left[1 + 2q^{2n}e^{-\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} + \ldots + q^{2n\rho_n}e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right]$$
$$+ q^{2n\rho_n}e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK').$$

Portant cette expression de $\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK')$ dans celle de $\varphi_n(x)$ et posant

$$(7)\quad g_n(x)=i\lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}}q^{-\mu n(n-1)}\left[1+2q^{2n}e^{-\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}+\ldots+q^{2n\rho_n}e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right],$$

on a

$$(8)\quad \varphi_n(x)-g_n(x)=\lambda^n e^{(\rho_n-\mu n)\frac{\pi\alpha i}{K}}q^{2n\rho_n-\mu n(n-1)}e^{-\rho_n\frac{\pi x i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK');$$

la fonction (7) $g_n(x)$ est, comme il a été dit plus haut, un polynôme en $\cos\frac{\pi x}{K}$ et $\sin\frac{\pi x}{K}$, et l'on voit que ce polynôme est de degré ρ_n.

Cela posé, la série

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty}[\varphi_n(x)-g_n(x)]$$

sera absolument convergente, si l'on choisit l'entier ρ_n en fonction de n de la façon suivante. Soit N un entier quelconque; on prendra ρ_n arbitraire pour toutes les valeurs de n pour lesquelles la différence $(\mu n-N)$ est négative, ce qui n'a lieu que pour un nombre fini de termes à cause de l'hypothèse $n>0$; et, pour les autres termes, on prendra

$$\rho_n=\mu n-N.$$

En effet, avec cette détermination de ρ_n, la différence $\varphi_n(x)-g_n(x)$ prend la forme

$$\lambda^n e^{-\frac{N\pi\alpha i}{K}}q^{\mu n(n+1)-2nN}e^{-(\mu n-N)\frac{\pi x i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK'),$$

ce qui, grâce à la présence du facteur $q^{\mu n^2}$, est le terme général d'une série absolument convergente. La détermination de ρ_n que nous venons d'indiquer dépend de l'entier arbitraire N; le plus simple sera de supposer $N=0$ et de prendre

$$(9)\qquad \rho_n=\mu n;$$

alors la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$ devient

$$(10) \qquad \lambda^n e^{-\mu n \frac{\pi x i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK'),$$

forme que nous adopterons définitivement.

Nous venons d'envisager les termes dans lesquels n est positif; supposons, au contraire, *n négatif;* en appliquant alors l'identité (6) dans laquelle on fait

$$a = q^{2n}, \quad b = e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}, \quad \rho = \rho_n,$$

on a

$$\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK') = -i\left[1+2q^{-2n}e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}+\ldots+q^{-2n\rho_n}e^{\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right]$$
$$+\, q^{-2n\rho_n}e^{\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK').$$

Si l'on pose

$$g_n(x) = -i\lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)}\left[1+2q^{-2n}e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}+\ldots+q^{-2n\rho_n}e^{\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right],$$

il vient, pour la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$, l'expression

$$\lambda^n e^{-(\mu n+\rho_n)\frac{\pi\alpha i}{K}} q^{-2n\rho_n-\mu n(n-1)} e^{\rho_n\frac{\pi x i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK').$$

La détermination la plus simple de l'entier ρ_n sera ici

$$(9') \qquad \rho_n = -\mu n,$$

ce qui donne

$$(10') \qquad \varphi_n(x) - g_n(x) = \lambda^n e^{-\mu n\frac{\pi x i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK'),$$

expression identique à (10). Ainsi l'on peut, pour les valeurs positives et négatives de n, déterminer des polynômes $g_n(x)$ de degrés $\pm\mu n$ en $\cos\frac{\pi x}{K}$ et $\sin\frac{\pi x}{K}$, de telle manière que la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$ prenne la forme (10). On obtiendra, de cette façon, pour l'une des

fonctions satisfaisant à la question, la série

$$(12)\quad \begin{cases} \Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_n(x) - g_n(x)] \\ \quad = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n e^{-\mu n \frac{\pi \alpha i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'). \end{cases}$$

La fonction transcendante $\Phi(x)$ à laquelle on est ainsi conduit se rencontre, comme on pouvait le prévoir, dans le problème de la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples [1]. Elle s'exprime aisément à l'aide de la transcendante que j'ai désignée par $\chi_\mu(\alpha, z)$ et qui est définie par la série

$$\chi_\mu(\alpha, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\mu n \pi z i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(\alpha - z - 2niK').$$

Si, dans la série (12), on fait $\lambda = e^{\frac{\mu\pi\beta i}{K}}$, β étant une constante convenablement choisie, et si l'on y change n en $-n$, on voit que

$$\Phi(x) = -\frac{2K}{\pi} \chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta),$$

$$\frac{\pi A}{2K} \Phi(x) = -A \chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta).$$

Revenons maintenant à la fonction doublement périodique de troisième espèce $F(x)$ qui vérifie les relations (1). Nous avons supposé que dans un parallélogramme des périodes elle admettait le pôle α avec le résidu A; imaginons qu'elle ait, dans ce même parallélogramme, n autres pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de résidus $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Il résulte de ce qui précède que cette fonction $F(x)$ ne différera de la somme

$$-A\chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta) - A_1\chi_\mu(\alpha_1 + \beta, x + \beta) - \ldots - A_n\chi_\mu(\alpha_n + \beta, x + \beta)$$

---

(1) *Voir* deux Mémoires que j'ai publiés dans les *Annales de l'École Normale* en 1884 et 1885.

que par une fonction entière $G(x)$,

$$F(x) = G(x) - A\chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta)$$
$$- A_1\chi_\mu(\alpha_1 + \beta, x + \beta) - \ldots - A_n\chi_\mu(\alpha_n + \beta, x + \beta).$$

Comme chacune des fonctions

$$\chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta), \quad \ldots, \quad \chi_\mu(\alpha_n + \beta, x + \beta)$$

vérifie les relations (1), ainsi que l'on s'en assurera facilement, il faut, pour que la fonction $F(x)$ vérifie ces relations, que la fonction entière $G(x)$ les vérifie également. Or il est facile d'avoir l'expression la plus générale d'une telle fonction $G(x)$; c'est, comme l'on sait, une fonction linéaire homogène de μ fonctions spéciales qui, d'après la notation que j'ai employée dans mon premier Mémoire ([1]), s'écriront

$$g_0^{(\mu)}(x + \beta), \quad g_1^{(\mu)}(x + \beta), \quad \ldots, \quad g_{\mu-1}^{(\mu)}(x + \beta);$$

on aura donc

$$G(x) = K_0 g_0^{(\mu)}(x + \beta) + K_1 g_1^{(\mu)}(x + \beta) + \ldots + K_{\mu-1} g_{\mu-1}^{(\mu)}(x + \beta),$$

où il ne restera plus qu'à déterminer les constantes K_0, K_1, ..., $K_{\mu-1}$ dans chaque exemple particulier.

2. La résolution de ce même problème dans le cas où l'entier μ qui figure dans les équations (1) est négatif ne présente aucune difficulté; ce cas est celui où la fonction $F(x)$ contient dans son expression plus de fonctions Θ au dénominateur qu'au numérateur. Si l'on suppose $\mu = -\nu$, l'expression du résidu (3) relatif au pôle

$$\alpha + 2mK + 2niK'$$

devient, en laissant de côté le facteur A,

$$\lambda^n e^{\frac{\nu n\pi\alpha i}{K}} q^{\nu n(n-1)},$$

([1]) *Annales de l'École Normale*, 1884, p. 138.

et la série des parties principales $\varphi_n(x)$

$$\Psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n e^{\frac{\nu n \pi \alpha i}{K}} q^{\nu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK')$$

est absolument convergente. Si l'on fait encore ici

$$\lambda = e^{\frac{\nu\pi\beta i}{K}},$$

on a

$$\Psi(x) = \frac{2K}{\pi} \chi_\nu(x + \beta, \alpha + \beta).$$

On trouve alors, en supposant que $F(x)$ ait les pôles simples α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de résidus $A, A_1, \ldots, A_n$,

$$F(x) = A\chi_\nu(x + \beta, \alpha + \beta) + A_1\chi_\nu(x + \beta, \alpha_1 + \beta) + \ldots + A_n\chi_\nu(x + \beta, \alpha_n + \beta),$$

sans ajouter de fonction entière, comme je l'ai montré dans mon premier Mémoire.

SUR LE

NOMBRE DES VARIATIONS D'UN POLYNOME

ENTIER EN x,

DONT LES COEFFICIENTS DÉPENDENT D'UN PARAMÈTRE α,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Si l'on considère un polynôme $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable x, et où les coefficients des différentes puissances de cette variable soient des fonctions entières du paramètre α, on s'aperçoit immédiatement que le nombre des variations de ce polynôme dépend de la valeur numérique de α, et qu'il peut varier lorsque cette valeur varie. L'objet du présent Mémoire est de faire connaître un procédé simple pour déterminer ce nombre de variations lorsque α est donné, et pour suivre les changements qu'il éprouve lorsque α croît ou décroît d'une manière continue.

2. Nous examinons d'abord (Chap. I) le cas le plus facile, celui où aucun des coefficients du polynôme n'est, en α, d'un degré supérieur au premier. Nous montrons que, pour étudier le nombre des variations d'un pareil polynôme, il suffit de construire une certaine *ligne brisée*, et de voir comment cette ligne brisée est coupée par une certaine *droite*. Le nombre des variations est donné alors, pour une valeur quelconque de α, par un théorème très net, de la plus grande simplicité.

Nous appliquons (Chap. II) ce premier théorème à plusieurs exemples. Dans l'un d'eux, nous étudions le produit de la multiplication d'un

polynôme entier en x, à coefficients numériques, par un binôme de la forme $x^h + \alpha$. Il est évident qu'un tel produit appartient au cas facile que nous venons de considérer.

Nous passons ensuite (Chap. III) au cas général, c'est-à-dire au cas où, dans le polynôme $f(x, \alpha)$, les coefficients des différentes puissances de x sont, en α, d'un degré quelconque. Nous montrons qu'il convient alors, pour étudier le nombre des variations du polynôme donné, de construire, non plus une ligne brisée unique, mais un *ensemble de lignes brisées*, constituant une sorte de réseau. Ce réseau construit, on n'a plus qu'à voir de quelle façon il est coupé par une certaine *droite*. On arrive ainsi à un théorème tout à fait général qui, par suite, comprend le théorème précédent, et qui n'est, dans son énoncé, ni moins net, ni moins simple que ce premier théorème.

Pour bien faire comprendre notre théorème général, nous l'appliquons (Chap. IV) à deux exemples, l'un où il s'agit d'un polynôme $f(x, \alpha)$ du sixième degré en x et du troisième en α, l'autre où nous considérons le produit de la multiplication d'un polynôme entier en x, à coefficients numériques, par le trinôme $x^2 + \alpha x + \alpha^2$. Nous faisons remarquer ensuite que l'examen du réseau correspondant au polynôme quelconque $f(x, \alpha)$ suggère, relativement à ce polynôme, les énoncés de différents théorèmes. Nous n'en citons que deux, qui sont pour ainsi dire évidents.

On sait le rôle que jouent, dans la plupart des théorèmes sur les équations algébriques, les nombres de variations de certains polynômes ou de certaines suites de polynômes. Nous déduisons (Chap. V) de tout ce qui précède une règle pour l'*abaissement* de la *limite de Descartes*, touchant le nombre des racines positives d'une équation donnée. Cette règle, comme nous le faisons voir sur des exemples, est d'une application extrêmement commode; elle possède ce triple avantage : de n'exiger pour ainsi dire aucun calcul; de pouvoir être variée par le choix d'un exposant arbitraire; de pouvoir enfin s'appliquer plusieurs fois de suite à la même équation, en donnant, à chaque fois, un nouvel abaissement.

3. Nous avons fait connaître déjà le principe et les premiers résultats du travail actuel dans une Note que notre illustre maître, M. Her-

mite, a bien voulu présenter ([1]) à l'Académie des Sciences. Nous avions antérieurement, dans deux Mémoires insérés aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* ([2]), étudié le nombre des variations que l'on perd ou que l'on gagne en multipliant par $x \pm \alpha$ un polynôme entier en x quelconque. Par son objet, le présent Mémoire est, en apparence, fort analogue à ces Mémoires antérieurs; en réalité, il s'en éloigne absolument par sa méthode, et ne s'en rapproche que très peu par ses résultats.

CHAPITRE PREMIER.

Étude du cas particulier le plus simple.

4. Dans toute l'étendue du présent travail, nous désignons par $f(x, \alpha)$ un polynôme quelconque, entier en x et en α, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, et, d'ailleurs, complet ou incomplet. Les coefficients des diverses puissances de x y sont évidemment des polynômes entiers en α. Dans ce premier Chapitre, nous considérons le cas particulier le plus simple, celui où ces coefficients sont, par rapport à α, au plus du premier degré.

Dans ce premier Chapitre, par conséquent, ces coefficients sont ou de simples constantes, ou des constantes multipliées par α, ou des binômes de la forme $A\alpha + B$. Cette dernière forme peut être regardée comme la forme générale. Elle comprend, en effet, les deux précédentes, si l'on convient que A et B désignent des constantes dont une seule puisse être égale à zéro.

5. Les signes des coefficients des différentes puissances de x, et, par conséquent, les variations et permanences du polynôme $f(x, \alpha)$, dépendent évidemment de la valeur de α. Il s'agit de découvrir un procédé qui permette de trouver le nombre de ces variations lorsque α prend une valeur donnée, et de suivre les changements que ce nombre éprouve lorsque l'on fait varier cette valeur.

Afin de simplifier nos théorèmes, et dans leurs énoncés et dans leurs

---

([1]) Le 28 juillet 1884.

([2]) Volume de 1883, Supplément.

démonstrations, nous ne ferons varier α que de o à $+\infty$, en d'autres termes, nous ne donnerons à cette indéterminée que des valeurs *positives*. Cette manière de procéder suffit à tous les cas, car l'étude, pour les valeurs négatives de α, du nombre des variations du polynôme $f(x, \alpha)$ revient évidemment à l'étude, pour les valeurs positives de α, du nombre des variations du polynôme $f(x, -\alpha)$.

6. Cette dernière remarque s'étend à tout le présent Mémoire : nous n'y faisons jamais varier α que depuis o jusqu'à $+\infty$. Encore devons-nous dire depuis o exclusivement, car les premières valeurs que nous donnions à α sont des valeurs positives, à la vérité aussi petites que l'on veut, mais dont aucune n'est égale à zéro.

Ces premières valeurs de α en sont les *valeurs initiales*. On voit immédiatement, sans aucun calcul, les signes que prennent, pour ces premières valeurs, tous les termes de notre polynôme. Ces signes forment des variations et des permanences : ce sont les *variations* et les *permanences initiales* du polynôme considéré.

7. Ainsi, nous connaissons immédiatement le nombre des *variations initiales* du polynôme $f(x, \alpha)$. Restent à suivre les changements qu'éprouve ce nombre lorsque l'on fait croître α.

Pour suivre ces changements, nous considérons, dans le polynôme $f(x, \alpha)$, les coefficients des différentes puissances de x. Nous pouvons, d'après ce qui précède, les regarder tous comme des fonctions linéaires de α. Ces fonctions linéaires, égalées à zéro, nous donneront autant d'équations du premier degré qu'il y a de coefficients; et chacune de ces équations aura sa racine ou nulle, ou infinie, ou négative, ou positive.

8. Étudions d'abord le cas où cette équation du premier degré a sa racine positive, et désignons par α_1 la valeur de cette racine. Tant que α sera inférieur à α_1, le coefficient correspondant gardera son signe initial; dès que α dépassera α_1, ce coefficient prendra le signe contraire. Si nous marquons, sur une ordonnée correspondant à ce coefficient, le *gros point* α_1 qui répond à cette racine, et si nous traçons l'horizontale $y = \alpha$, que nous nommerons d'ordinaire l'*horizontale* α,

tant que cette horizontale passera au-dessous du gros point α_1, le coefficient gardera son signe initial; dès que cette horizontale passera au-dessus de ce gros point, ce coefficient prendra le signe contraire.

9. Étudions à présent le cas où l'équation du premier degré n'a point sa racine positive. Que cette racine soit alors nulle, infinie ou négative, il est évident que le coefficient correspondant gardera son signe initial pour toutes les valeurs positives de α. Pour opérer comme précédemment, nous marquerons un gros point sur l'ordonnée correspondant à ce coefficient, à l'endroit où cette ordonnée coupe une parallèle à l'axe des abscisses, que nous supposons tracée très haut et que nous appelons la *droite de l'infini*. L'horizontale α passera toujours au-dessous de cette parallèle et, par conséquent, du gros point. Nous pourrons donc dire, comme dans le cas précédent, que le coefficient considéré garde son signe initial, tant que l'horizontale α passe au-dessous du gros point correspondant.

10. Supposons qu'on ait tracé toutes les ordonnées correspondant aux différents coefficients du polyuôme, et que, sur chacune d'elles, on ait marqué, à distance finie ou infinie, le gros point dont on a parlé. Considérons deux consécutives de ces ordonnées, et joignons-en les deux gros points par un trait, *plein* si, à l'instant initial, les deux coefficients correspondants présentent une *permanence, ponctué* si, à ce même instant, ils présentent une *variation*.

Lorsque l'horizontale α passe au-dessous des deux gros points, chacun des deux coefficients garde son signe initial, la permanence ou variation initiale se conserve. Lorsque l'horizontale α passe au-dessus des deux gros points, les deux signes initiaux sont remplacés par les signes contraires, mais on peut dire encore, et bien qu'elle change d'aspect, que la permanence ou variation initiale se conserve. Dans ces deux cas, le polynôme donné ne perd ni ne gagne, à cet endroit, aucune variation; et l'on peut remarquer que l'horizontale α ne rencontre pas le trait qui joint les deux gros points.

Si l'horizontale α passe entre les deux gros points, l'un des signes initiaux se conserve, tandis que l'autre est remplacé par le signe contraire; la permanence ou variation initiale se change en variation ou en

permanence; et l'on peut remarquer alors que le trait qui joint les deux gros points est coupé par l'horizontale α.

Il suit immédiatement de tout cela qu'il ne se perd une variation que quand un trait ponctué est coupé par l'horizontale α, et qu'il ne s'en gagne une que quand un trait plein est coupé par cette même horizontale.

11. En résumé, étant donné le polynôme $f(x, \alpha)$, où aucun coefficient n'est, en α, d'un degré supérieur au premier, pour étudier le nombre des variations de ce polynôme, on tracera autant d'ordonnées verticales équidistantes qu'il y a de coefficients; on limitera ces ordonnées, en bas, par un axe horizontal des abscisses, en haut, par une parallèle à cet axe, qui sera pour nous la droite de l'infini; sur chaque ordonnée, on marquera un gros point, à la hauteur α, si le coefficient correspondant s'annule pour cette valeur positive de α, à la rencontre avec la droite de l'infini si ce coefficient ne s'annule pour aucune valeur positive de ce paramètre; on joindra enfin, à partir de la gauche, le gros point de chaque ordonnée à celui de l'ordonnée suivante, par un trait plein ou ponctué, suivant que les coefficients correspondants présenteront une permanence ou une variation initiale. Tous ces traits, tracés bout à bout, formeront une ligne brisée qui sera la ligne représentative du polynôme. On mènera, au travers de tout le Tableau ainsi construit, ce que nous appelons l'horizontale α; et l'on pourra énoncer alors le théorème suivant, qui sera notre premier théorème :

Théorème I. — *Étant donné le polynôme entier $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et du premier degré seulement en α, le nombre des variations de ce polynôme, pour une valeur déterminée de α, est juste égal au nombre des variations initiales, plus le nombre des traits pleins coupés par l'horizontale α, moins le nombre des traits ponctués coupés par la même horizontale.*

12. Ce théorème, on peut le remarquer sur sa démonstration, non seulement convient au cas considéré par nous, mais encore s'étend, sans modification, à tous les cas où les coefficients des différentes puis-

sances de x sont des fonctions de α, dont aucune ne change plus d'une fois de signe, lorsque α croît de o à $+\infty$.

Quant à l'énoncé qui précède, c'est en quelque sorte un énoncé *graphique*. C'est à cette circonstance qu'il est redevable de sa simplicité et de sa netteté. Cet énoncé, d'ailleurs, se rapporte au cas général, c'est-à-dire au cas où l'horizontale α ne rencontre aucun des gros points. Dans le cas exceptionnel où le contraire aurait lieu, l'examen du Tableau, comme on le verra sur les exemples, suffirait pour lever toutes les difficultés.

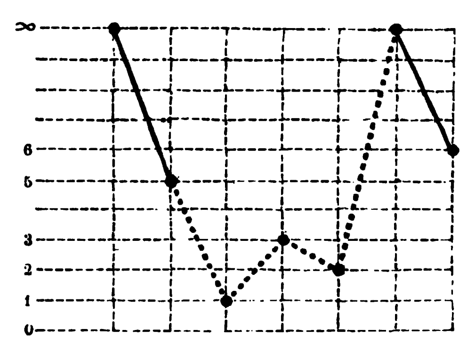
CHAPITRE II.

Applications du premier théorème.

13. Prenons, pour premier exemple, le polynôme

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r} x^7+5 & x^6-1 & x^5+3 & x^3-2 & x^2+8 & x+6 \\ -\alpha & +\alpha & -\alpha & +\alpha & +\alpha & -\alpha \end{array}.$$

Si nous en construisons la ligne brisée représentative, nous formons le Tableau suivant :



D'abord, pour les valeurs très petites de α, nous constatons, sur ce Tableau, que le polynôme donné a 4 variations. C'est le nombre des variations initiales; il est juste égal au nombre des traits ponctués que la ligne brisée nous présente.

Supposons qu'on nous demande le nombre des variations que possède le polynôme donné lorsque α est égal à 4. Évidemment alors l'ho-

rizontale α coupe deux traits ponctués. Donc, d'après notre théorème, le nombre des variations est égal à $4 - 2$, c'est-à-dire à 2.

Lorsque α est égal à 4, l'horizontale α ne passe par aucun gros point. Si nous donnons à α la valeur 3, cette horizontale passe par l'un des gros points, et elle coupe deux traits ponctués. Au point qu'elle rencontre, le Tableau montre qu'il se perd deux variations. Donc, lorsque α est égal à 3, le nombre des variations du polynôme est égal à $4 - 2 - 2$, c'est-à-dire à zéro.

14. Ainsi, par l'examen seul de notre Tableau, nous voyons, comme nous l'avions annoncé (nº 12), ce qui arrive dans les cas exceptionnels où l'horizontale α passe par un ou plusieurs des sommets de notre ligne brisée. Dans les cas généraux où elle ne passe par aucun d'eux, nous n'avons qu'à appliquer littéralement notre théorème. Il nous suffit de considérer l'horizontale α, en la faisant mouvoir s'il est nécessaire, pour résoudre, sans aucune peine, les quatre problèmes suivants :

1° *Quels changements éprouve le nombre des variations du polynôme donné lorsque α varie de 0 à $+\infty$?*

2° *Combien ce polynôme présente-t-il de variations lorsque α a une valeur positive déterminée?*

3° *Entre quelles limites la valeur de α doit-elle être comprise pour que ce polynôme ait un nombre donné de variations?*

4° *Entre quelles limites la valeur de α doit-elle être comprise pour que ce polynôme ait le plus grand ou le plus petit nombre possible de variations?*

15. Comme seconde application de notre théorème I, nous pouvons considérer le produit du polynôme

$$x^7 + x^6 - 2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 5x - 11$$

par le binôme $x^2 + \alpha$.

Ce produit évidemment est un polynôme entier en x et en α, du genre de ceux que nous considérons présentement. Si nous en construisons la ligne brisée, puis que, sur le Tableau formé, nous fassions monter l'horizontale α de 0 à $+\infty$, nous obtenons une suite de résultats qui peuvent se résumer ainsi : pour toutes les valeurs de α infé-

rieures à $\frac{1}{2}$ ou supérieures à 5, le produit considéré présente trois variations; il n'en présente qu'une, lorsque α est soit égal à $\frac{1}{2}$, soit égal à 5, soit compris entre $\frac{1}{2}$ et 5.

16. Le produit que nous venons d'étudier n'est qu'un cas très particulier du produit qu'on obtient en multipliant un polynôme entier en x quelconque par le binôme $x^h + \alpha$. Notre théorème I s'applique évidemment à tous les produits de cette sorte. Quand on ne considère qu'eux seuls, on peut remplacer l'énoncé graphique de ce théorème par un énoncé analytique, fondé sur la considération de certains groupes, élévateurs ou abaisseurs, de 4 coefficients chacun. Mais, comme cet énoncé analytique n'est qu'un énoncé particulier et incommode, nous ne le donnerons point.

CHAPITRE III.

Étude du cas général.

17. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le polynôme $f(x, \alpha)$ du premier degré seulement en α. Nous supposons maintenant que ce polynôme soit de degré quelconque par rapport à ce paramètre, c'est-à-dire que, dans ce polynôme, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le coefficient de chaque puissance de x soit un polynôme entier en α et de degré quelconque.

18. Ces coefficients, égalés séparément à zéro, nous donnent chacun une équation algébrique, dont les racines réelles peuvent être nulles, ou infinies, ou négatives, ou positives. Nous nous attachons principalement aux racines réelles et positives; nous supposons que celui des coefficients qui en a le plus de cette espèce en ait un nombre égal à m; et nous supposons, en outre, que ces m racines soient distinctes.

Étant tracée l'ordonnée correspondant à ce coefficient et marqués sur elle les m gros points répondant à ces m racines, il est évident que, tant que l'horizontale α passera au-dessous de tous ces gros points, le coefficient considéré gardera son signe initial, c'est-à-dire le signe évident qu'il possède lorsque α est positif et très voisin de zéro; il est

évident aussi que ce coefficient changera de signe, chaque fois que l'horizontale α, supposée animée d'un mouvement ascensionnel, dépassera l'un de ces m gros points.

Par suite, le coefficient considéré aura son signe initial, toutes les fois que l'horizontale α laissera, au-dessous d'elle, un nombre *pair* de gros points; et aura le signe contraire, toutes les fois qu'elle en laissera un nombre *impair*.

19. Considérons maintenant un autre coefficient du polynôme $f(x, \alpha)$, et supposons qu'il ait moins de m racines positives. Nous marquerons sur son ordonnée, à distances finies, les gros points correspondant à ses m' racines; puis, à la rencontre de cette ordonnée avec la droite de l'infini, un gros point supplémentaire qui correspondra à lui seul aux $m - m'$ racines positives que le coefficient devrait avoir encore pour posséder m racines positives. Nous pourrons répéter alors, pour ce coefficient, ce que nous avons dit pour le précédent : il aura son signe initial ou le signe contraire, suivant que l'horizontale α laissera au-dessous d'elle, sur l'ordonnée de ce coefficient, des gros points en nombre pair ou impair.

20. Supposons que l'opération que nous venons de faire (n^{os} 18 et 19) sur deux coefficients ait été effectuée sur tous; et, dans le Tableau formé, considérons, en particulier, deux ordonnées consécutives. Nous pouvons, en allant de bas en haut sur chaque ordonnée, joindre, par un trait, le premier gros point de l'ordonnée de gauche au premier gros point de l'ordonnée de droite; puis, par un deuxième trait, le deuxième gros point de gauche au deuxième de droite; et ainsi de suite, en prenant soin, d'ailleurs, de tracer des traits tous *pleins* ou tous *ponctués*, suivant que les coefficients correspondant à nos deux ordonnées présentent, à l'instant initial, une *permanence* ou une *variation*.

21. Lorsque l'horizontale α traverse l'ensemble de nos deux ordonnées consécutives et des traits compris entre elles, il peut évidemment se présenter trois cas : ou bien, entre ces deux ordonnées, cette horizontale ne coupe aucun trait; ou bien elle en coupe un nombre pair; ou bien elle en coupe un nombre impair.

Si elle ne rencontre aucun trait, c'est qu'elle laisse sur chaque ordonnée le même nombre de gros points au-dessous d'elle; par suite, que les coefficients correspondants ont, tous les deux, leurs signes initiaux ou, tous les deux, les signes contraires : la permanence ou variation initiale n'est point changée.

Si l'horizontale α coupe un nombre pair de traits, il en est encore de même; la permanence ou variation initiale est conservée, car, sur les deux ordonnées, les nombres de gros points que l'horizontale laisse au-dessous d'elle sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Si l'horizontale α coupe un nombre impair de traits, c'est que, sur nos deux ordonnées, les nombres de gros points que cette horizontale laisse au-dessous d'elle ont une différence impaire; partant, que l'un de ces nombres est pair et l'autre impair; partant, que l'un des coefficients conserve son signe initial, tandis que l'autre prend le signe contraire. Il s'ensuit que, s'il y avait permanence initiale, cette permanence se change en variation; et inversement que, s'il y avait variation initiale, cette variation se change en permanence.

22. Les mêmes faits se reproduisent dans toute l'étendue de notre Tableau. Si donc, pour abréger, nous désignons par l'expression de *système de traits* l'ensemble des traits compris entre deux ordonnées consécutives et coupés par l'horizontale α, et que nous appelions *système impair* tout système composé d'un nombre impair de traits, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant donné le polynôme entier $f(x, \alpha)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et de degré quelconque en x et en α, le nombre des variations de ce polynôme est juste égal au nombre des variations initiales, plus le nombre des systèmes impairs de traits pleins coupés par l'horizontale α, moins le nombre des systèmes impairs de traits ponctués coupés par la même horizontale.*

23. Ce théorème est tout à fait général. Il comprend notre théorème I comme cas particulier, puisqu'un simple trait est un système impair. Son énoncé, comme celui du théorème I, est en quelque sorte un énoncé graphique. Il se rapporte, d'ailleurs, au cas général où l'horizontale α ne passe par aucun des gros points du Tableau : dans le cas

exceptionnel où elle passerait par un ou plusieurs de ces points, on verrait immédiatement, sur le Tableau même, si, en ces divers points, quelque variation est perdue ou gagnée.

24. Dans la construction de notre Tableau, nous avons supposé simples toutes les racines positives que nous avons considérées. Pour compléter nos indications, nous avons à dire ce qu'il faut faire lorsqu'on rencontre une racine positive multiple.

Si le degré de multiplicité de cette racine est impair, on traite la racine absolument comme une racine simple, marquant un gros point, à la hauteur convenable, sur l'ordonnée correspondante, puis joignant ce gros point, par un trait plein ou ponctué, au gros point de même rang, à partir du bas, de l'ordonnée précédente, et au gros point de même rang de l'ordonnée suivante.

Si le degré de multiplicité est pair, on marque sur l'ordonnée correspondante, à la hauteur indiquée par la valeur de la racine, non plus un gros point, mais un signe quelconque, par exemple une croix, et on laisse cette croix isolée, sans la joindre à quoi que ce soit par aucun trait. Lorsque l'horizontale α ne passe pas par cette croix, on fait abstraction de ce signe. Lorsque cette horizontale y passe, le coefficient correspondant s'annule; et il faut voir, sur le Tableau, si la lacune qui se produit alors dans le polynôme fait perdre ou gagner quelque variation.

CHAPITRE IV.

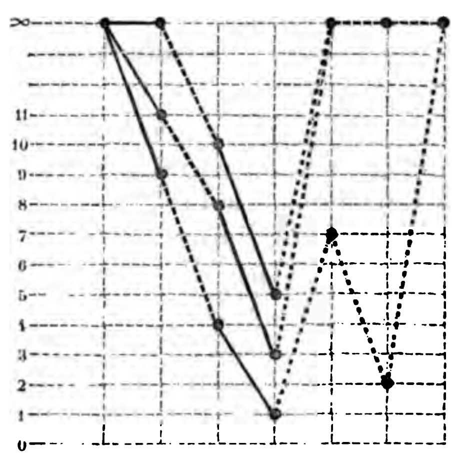
Applications du théorème II.

25. Pour donner une première application de notre théorème II, considérons le polynôme suivant, dont les coefficients sont des polynômes entiers en α, la plupart d'un degré supérieur au premier,

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
x^6 + 99 & x^5 - 320 & x^4 - 15 & x^3 + 7 & x^2 - 2\alpha & x + 11. \\
- 20\alpha & + 152\alpha & + 23\alpha & + 6\alpha & + \alpha^2 & \\
+ \alpha^2 & - 22\alpha^2 & - 9\alpha^2 & - \alpha^2 & & \\
 & + \alpha^3 & + \alpha^3 & & &
\end{array}$$

Dans ce polynôme, ceux des coefficients qui ont le plus de racines

positives en ont trois. D'après ce que nous avons dit, nous tracerons autant d'ordonnées verticales équidistantes qu'il y a de coefficients. Sur chacune d'elles, nous marquerons les gros points représentant les racines positives du coefficient correspondant. Si le nombre de ces racines est inférieur à trois, nous marquons, en outre, à l'intersection de l'ordonnée considérée et de la droite de l'infini, un gros point représentant toutes les racines positives qu'il faudrait adjoindre à celles qu'on a trouvées pour atteindre le nombre 3. Nous joignons ensuite, en allant de gauche à droite, par un trait plein ou ponctué, chaque gros point de chaque ordonnée au gros point de même rang, à partir du bas, de l'ordonnée suivante, et nous obtenons de cette façon le Tableau que voici :



Nous voyons immédiatement, sur ce Tableau, que le nombre des variations initiales est égal à 4. Pour trouver le nombre des variations lorsque α est, par exemple, égal à 6, nous menons l'horizontale $y = 6$. Cette droite coupe quatre systèmes impairs de traits ponctués, composés, l'un de trois traits et les autres d'un trait seulement chacun; elle ne coupe aucun système impair de traits pleins. Si donc nous appliquons littéralement notre théorème général, nous trouvons, lorsque α est égal à 6, que le nombre des variations de notre polynôme est égal à $4 + 0 - 4$, c'est-à-dire à zéro.

Considérons une autre valeur de α, la valeur 2 par exemple, pour

laquelle l'horizontale α passe par l'un des gros points du Tableau. Cette droite coupe un système impair de traits pleins et un système impair de traits ponctués. Au gros point qu'elle rencontre, nous voyons, sur le Tableau même, qu'il se perd 2 variations. Donc, lorsque α est égal à 2, le nombre des variations de notre polynôme est égal à $4+1-1-2$, c'est-à-dire à 2.

26. En faisant, sur le Tablean précédent, mouvoir, de bas en haut, l'horizontale α, depuis l'axe des abscisses jusqu'à la droite de l'infini, on pourrait suivre les changements qu'éprouve, lorsque α croît, le nombre des variations du polynôme considéré; et, par conséquent, résoudre sans aucune peine tous les problèmes que nous avons énoncés déjà (n° 14).

27. Comme seconde application de notre théorème II, nous pouvons considérer le produit du polynôme $x^5-3x^4+2x^3-4x^2-6x+88$ par le trinôme $x^2+\alpha x+\alpha^2$. Dans ce produit, les coefficients des différentes puissances de x seront des polynômes entiers en x, en général du second degré. Si l'on construit le Tableau relatif à ce polynôme, on voit que le nombre des variations initiales est 4; et si l'on trace sur ce Tableau l'horizontale $y=3,5$, par exemple, on voit que cette horizontale coupe un système impair de traits pleins, et trois systèmes impairs de traits ponctués. Il s'ensuit que, pour cette valeur 3,5 de α, le nombre des variations du produit considéré est égal à $4+1-3$, c'est-à-dire à 2.

28. L'examen attentif des Tableaux que nous avons enseigné à construire nous conduit, tout naturellement, à plusieurs théorèmes nouveaux. Nous ne donnerons que les deux suivants, qui sont pour ainsi dire évidents, et qui reposent sur la considération des racines positives des coefficients du polynôme $f(x,\alpha)$.

Théorème. — *Si le polynôme $f(x,\alpha)$ possède v variations initiales, et si, parmi les racines positives de ses coefficients, les p plus petites, supposées chacune d'un degré impair de multiplicité, appartiennent à des coefficients tous différents, dont deux quelconques ne sont pas consécutifs et dont chacun est placé entre deux variations initiales, on peut toujours*

trouver des valeurs de α telles que, pour ces valeurs, le polynôme considéré conserve, au plus, $v - 2p$ variations.

THÉORÈME. — *Si le polynôme $f(x, \alpha)$ possède v variations initiales, et si, parmi les racines positives de ses coefficients, les p plus petites, supposées chacune d'un degré impair de multiplicité, appartiennent à des coefficients tous différents, dont deux quelconques ne sont pas consécutifs, et dont chacun est placé entre deux permanences initiales, on peut toujours trouver des valeurs de α telles que, pour ces valeurs, le polynôme considéré prenne, au moins, $v + 2p$ variations.*

CHAPITRE V.

Abaissement de la limite de Descartes.

29. Descartes est le premier qui ait donné une limite supérieure du nombre des racines positives des équations algébriques. Cette limite repose sur la considération des combinaisons de signes que nous nommons à présent *variations* ou *permanences;* et cette considération, qui nous paraît entièrement due à Descartes, est si intimement liée au nombre des racines des équations algébriques, qu'elle se retrouve dans la plupart, peut-être même dans la totalité, des théorèmes connus aujourd'hui sur le nombre de ces racines.

C'est l'énoncé de la limite dont nous parlons qui constitue ce qu'on appelle, à volonté, le *théorème* ou la *règle des signes de Descartes*, théorème ou règle qui consiste en ceci : *Le nombre des racines positives de l'équation algébrique $f(x) = 0$ est, au plus, égal au nombre des variations du polynôme $f(x)$; et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

Le grand avantage de cette limite de Descartes c'est qu'elle s'obtient, sans aucun calcul, par l'examen seul du premier membre de l'équation donnée. Son inconvénient, c'est que, dans beaucoup de cas, le nombre qu'elle fournit est trop élevé. Il serait utile de trouver, pour l'abaisser, quelque procédé général et simple.

30. Considérons l'équation de degré quelconque $f(x) = 0$, et, en même temps, le produit $f(x)\varphi(x)$, dont le multiplicateur $\varphi(x)$ n'a

aucune racine positive. L'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a évidemment les mêmes racines positives que l'équation proposée. Si donc son premier membre $f(x)\varphi(x)$ a moins de variations que n'en avait $f(x)$, c'est que le nombre v des variations de $f(x)$ était une limite trop élevée : on lui substituera le nombre v' des variations du produit $f(x)\varphi(x)$.

Par conséquent, pour abaisser la limite de Descartes, il suffit de voir si l'on peut trouver un multiplicateur $\varphi(x)$, dépourvu de racines positives, et tel que le produit $f(x)\varphi(x)$ ait moins de variations que le multiplicande $f(x)$.

31. On peut évidemment chercher le multiplicateur $\varphi(x)$ parmi les polynômes de bien des sortes. Pour simplifier, nous le chercherons uniquement parmi les binômes de la forme $x^h + \alpha$, où h désigne un entier positif quelconque, et α un paramètre positif. Cela étant, notre règle pour l'abaissement de la limite de Descartes pourra s'énoncer ainsi :

Règle. — *Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée et v le nombre des variations de $f(x)$. Pour abaisser la limite v, on essayera d'abord le multiplicateur $x + \alpha$, c'est-à-dire qu'on cherchera quelles valeurs il faut donner à α pour que le produit de $f(x)$ par $x + \alpha$ ait le nombre minimum de variations. Si ce nombre minimum v' est inférieur à v, le nombre des racines positives de l'équation proposée est, au plus, égal à v'; et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

Si la multiplication par $x + \alpha$ ne permet pas d'abaisser la limite de Descartes, on essaye, par notre procédé habituel, la multiplication par $x^2 + \alpha$. Si celle-ci ne réussit point non plus, on essaye $x^3 + \alpha$; et ainsi de suite.

32. C'est un fait digne de remarque, que la présente règle, dans beaucoup de cas, peut s'appliquer plusieurs fois de suite à la même équation. Supposons, par exemple, que la multiplication par $x + \alpha$ réussisse, c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de α, telles que α_1, pour lesquelles v' soit inférieur à v. On effectuera la multiplication de $f(x)$ par $x + \alpha_1$, ce qui nous donnera un produit $F(x)$ présentant v' variations. Rien ne nous empêchera d'appliquer notre règle à ce nouveau polynôme $F(x)$; et ainsi de suite. Dans le premier des exemples que nous allons donner, notre règle s'applique jusqu'à trois fois.

33. Comme premier exemple, considérons l'équation ayant pour premier membre le polynôme

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 50x + 300,$$

qui présente 6 variations. D'après le théorème de Descartes, cette équation a, au plus, 6 racines positives.

Pour appliquer notre règle, essayons la multiplication par $x + \alpha$. En examinant la ligne brisée du polynôme donné, nous constatons qu'il suffit d'attribuer à α la valeur 1, pour que le produit par $x + \alpha$ n'ait plus que 4 variations. Ainsi, après la première application de notre règle, nous savons que l'équation proposée a, au plus, 4 racines positives.

Multiplions le polynôme donné par $x + 1$. Nous obtenons le polynôme

$$x^7 + x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 250x + 300.$$

Sur ce nouveau polynôme, essayons la multiplication par $x + \alpha$. Nous constatons, sur le Tableau correspondant à ce polynôme, qu'il suffit, pour lui faire perdre deux variations, de donner à α la valeur 3. Après avoir appliqué deux fois notre méthode, nous pouvons donc affirmer que l'équation proposée n'a pas plus de 2 racines positives.

Afin de l'appliquer une troisième fois, effectuons la multiplication par $x + 3$ dont nous venons de parler. Nous obtenons, comme produit, le nouveau polynôme

$$x^8 + 3x^7 + x^6 + x^4 - 5x^3 + 145x^2 + 1050x + 900,$$

auquel nous constatons que la multiplication par $x + \alpha$ fait encore perdre 2 variations, pour toutes les valeurs de α depuis 5 jusqu'à 29. Le produit par $x + 6$, par exemple, n'aurait donc plus aucune variation. Donc, l'équation proposée n'a aucune racine positive.

34. Nous prendrons, comme second exemple de l'application de notre règle, l'équation du neuvième degré qui a pour premier membre

$$x^9 + x^8 - 2x^7 - 5x^6 + 16x^5 + 35x^4 - x^3 - 35x^2 + 6x + 315.$$

En essayant la multiplication par $x + \alpha$, nous trouvons que, pour

aucune valeur de α, elle ne fait disparaître de variations. N'obtenant rien ainsi, nous sommes conduit à étudier la multiplication par $x^2 + \alpha$, et à construire la ligne brisée qui, dans cette multiplication, correspond à notre polynôme. Cette ligne nous montre que, dans cette multiplication, il se perd 4 variations pour toutes les valeurs de α comprises entre 5 et 6. Or le polynôme donné ne présentait que 4 variations. Donc l'équation donnée ne possède aucune racine positive.

35. La règle qui précède (nº 31), et dont nous venons de présenter deux exemples, nous paraît la plus simple qu'on ait encore donnée, pour l'abaissement de la limite de Descartes. Ses avantages peuvent se résumer ainsi : elle ne nécessite pour ainsi dire aucun calcul; elle présente une indéterminée h qui permet d'essayer successivement la multiplication par plusieurs binômes; enfin, comme on l'a vu sur notre premier exemple, elle peut s'appliquer plusieurs fois à la même équation, en donnant, à chaque fois, un nouvel abaissement.

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE DE LAGRANGE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

En posant

$$X = x + a\varphi(X),$$

la série de Lagrange donne le développement d'une fonction quelconque de X sous la forme

$$f(X) = f(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a^m}{1.2\ldots m} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [f'(x)\varphi^m(x)].$$

En prenant la dérivée par rapport à x, et écrivant $f(X)$ au lieu de $f'(X)$, on a aussi

$$f(X)\frac{dX}{dx} = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^m}{1.2\ldots m} \frac{d^m}{dx^m} [f(x)\varphi^m(x)].$$

Sous cette forme, la série de Lagrange est susceptible d'une généralisation élégante, donnée pour la première fois par M. Darboux (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII).

Supposons que les r variables X, Y, Z, ... soient liées aux variables x, y, z, ... en même nombre par les r équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} X = x + a\varphi(X, Y, Z, \ldots), \\ Y = y + b\psi(X, Y, Z, \ldots), \\ Z = z + c\chi(X, Y, Z, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

alors, $f(X, Y, Z, \ldots)$ étant une fonction quelconque, on a le développement

$$
\begin{aligned}
& f(X, Y, Z, \ldots) \times \Delta \\
& = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty \cdots \frac{a^m b^{m'} c^{m''} \ldots}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''} \\
& \quad \times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}[f(x, y, z, \ldots)\varphi^m(x, y, z, \ldots)\psi^{m'}(x, y, z, \ldots)\chi^{m''}(x, y, z, \ldots)\ldots]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},
\end{aligned}
$$

où

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} & \cdots \\
\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} & \cdots \\
\frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}.
$$

M. Darboux a donné ce développement dans le cas $r = 2$.

Dans la démonstration suivante, je supposerai $r = 3$, mais elle s'applique dans le cas général.

Comme on le verra, le point principal consiste dans l'établissement des identités

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d}{da}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dx}[\Delta f(X, Y, Z)\,\varphi(X, Y, Z)], \\
\frac{d}{db}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dy}[\Delta f(X, Y, Z)\,\psi(X, Y, Z)], \\
\frac{d}{dc}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dz}[\Delta f(X, Y, Z)\,\chi(X, Y, Z)].
\end{aligned}
\right.
$$

Il suffira, d'ailleurs, de vérifier la première de ces relations, le calcul étant tout à fait analogue pour les deux autres.

Mais, en développant cette relation, il vient

$$
\begin{aligned}
& \Delta\left(f'_X \frac{dX}{da} + f'_Y \frac{dY}{da} + f'_Z \frac{dZ}{da}\right) + f \frac{d\Delta}{da} \\
& = \varphi\Delta\left(f'_X \frac{dX}{dx} + f'_Y \frac{dY}{dx} + f'_Z \frac{dZ}{dx}\right) + f \frac{d(\varphi\Delta)}{dx},
\end{aligned}
$$

en sorte qu'il s'agira d'établir les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{da} &= \varphi\frac{dX}{dx},\\ \frac{dY}{da} &= \varphi\frac{dY}{dx},\\ \frac{dZ}{da} &= \varphi\frac{dZ}{dx} \end{aligned}\right.$$

et

$$(4)\quad \frac{d\Delta}{da} = \frac{d(\varphi\Delta)}{dx}.$$

La différentiation de la première des formules (1) donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} (1 - a\varphi'_X)\frac{dX}{da} &= \varphi + a\varphi'_Y\frac{dY}{da} + a\varphi'_Z\frac{dZ}{da},\\ (1 - a\varphi'_X)\frac{dX}{dx} &= 1 + a\varphi'_Y\frac{dY}{dx} + a\varphi'_Z\frac{dZ}{dx}, \end{aligned}\right.$$

et l'on obtient de même

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} b\psi'_X\frac{dX}{da} + (b\psi'_Y - 1)\frac{dY}{da} + b\psi'_Z\frac{dZ}{da} &= 0,\\ c\chi'_X\frac{dX}{da} + c\chi'_Y\frac{dY}{da} + (c\chi'_Z - 1)\frac{dZ}{da} &= 0 \end{aligned}\right.$$

et

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} b\psi'_X\frac{dX}{dx} + (b\psi'_Y - 1)\frac{dY}{dx} + b\psi'_Z\frac{dZ}{dx} &= 0,\\ c\chi'_X\frac{dX}{dx} + c\chi'_Y\frac{dY}{dx} + (c\chi'_Z - 1)\frac{dZ}{dx} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (6) déterminent les rapports $\frac{dX}{da} : \frac{dY}{da} : \frac{dZ}{da}$, les équations (7) les rapports $\frac{dX}{dx} : \frac{dY}{dx} : \frac{dZ}{dx}$. Or, les coefficients dans les systèmes (6) et (7) étant les mêmes, on a

$$\frac{dX}{da} : \frac{dY}{da} : \frac{dZ}{da} = \frac{dX}{dx} : \frac{dY}{dx} : \frac{dZ}{dx}.$$

Dès lors les équations (5) mettent en évidence les relations (3).

Il reste à vérifier la formule (4). On a

$$\frac{d\Delta}{da}=\begin{vmatrix} \frac{d^2X}{dx\,da} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d^2Y}{dx\,da} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d^2Z}{dx\,da} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d^2X}{dy\,da} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d^2Y}{dy\,da} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d^2Z}{dy\,da} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2X}{dz\,da} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2Y}{dz\,da} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2Z}{dz\,da} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Quant à Δ_1, on a, à cause des relations (3),

$$(8) \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

Il vient ensuite

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \varphi\frac{d^2X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \varphi\frac{d^2Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \varphi\frac{d^2Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(9) \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} \varphi\frac{dX}{dx} & \frac{d^2X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \varphi\frac{dY}{dx} & \frac{d^2Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \varphi\frac{dZ}{dx} & \frac{d^2Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix},$$

et de même

$$(10) \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} \varphi\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2X}{dz\,dx} \\ \varphi\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2Y}{dz\,dx} \\ \varphi\frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2Z}{dz\,dx} \end{vmatrix}.$$

Les équations (8), (9) et (10) donnent de suite

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{d\Delta}{da} = \frac{d(\varphi\Delta)}{dx},$$

c'est-à-dire la formule (4).

La première des équations (2) est ainsi établie parfaitement, les deux autres s'obtiennent de la même manière.

Par une application répétée de ces relations, on trouve de suite

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(X,Y,Z)]}{da^m\, db^{m'}\, dc^{m''}} \\ &\quad = \frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(X,Y,Z)\, \varphi^m(X,Y,Z)\, \psi^{m'}(X,Y,Z)\, \chi^{m''}(X,Y,Z)]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir le coefficient de $\dfrac{a^m b^{m'} c^{m''}}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''}$ dans le développement de $\Delta f(X,Y,Z)$, il suffit de supposer $a = b = c = 0$, dans cette formule (11). Or, dans cette supposition, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dx} = 1, \quad \frac{dX}{dy} = 0, \quad \frac{dX}{dz} = 0, \\ &\frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dY}{dy} = 1, \quad \frac{dY}{dz} = 0, \\ &\frac{dZ}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dy} = 0, \quad \frac{dZ}{dz} = 1, \end{aligned}$$

donc $\Delta = 1$; de plus $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, en sorte que ce coefficient est égal à

$$\frac{d^{m+m'+m''}[f(x,y,z)\,\varphi^m(x,y,z)\,\psi^{m'}(x,y,z)\,\chi^{m''}(x,y,z)]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}},$$

comme nous l'avons annoncé.

Je terminerai par la remarque suivante. Dans le Tome 54 du *Journal de Crelle*, M. Heine a déduit la formule de Lagrange à l'aide du calcul des variations. Cette démonstration peut être généralisée facilement, de manière à obtenir la formule que nous venons de démontrer, le

déterminant fonctionnel Δ s'introduisant alors de la manière la plus naturelle. Mais les formules (2) et la formule (11) qui s'en déduit immédiatement paraissent assez remarquables en elles-mêmes : c'est ce qui nous a fait préférer la méthode plus élémentaire que nous venons de développer.

SUR UNE

PROPOSITION DE M. HERMITE,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Soit u une fonction de z, liée à sa dérivée $\mathrm{U} = \frac{du}{dz}$ par une équation algébrique $f(u, \mathrm{U}) = 0$, où n'entre pas z.

MM. Briot et Bouquet ont fait connaître ([1]) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction u soit uniforme et les caractères distinctifs des trois espèces d'intégrales uniformes. D'autre part, M. Hermite a remarqué ([2]) que, l'intégrale étant uniforme, l'équation $f(u, \mathrm{U}) = 0$ ne pouvait être que du genre zéro ou un. J'ai donné ([3]) les conditions qu'il faut ajouter à celle-là pour que l'intégrale soit doublement périodique, simplement périodique ou rationnelle. Je me propose actuellement de déduire des conditions formulées par MM. Briot et Bouquet la proposition de M. Hermite. Je montrerai ensuite comment on peut éviter dans chaque cas particulier la détermination du genre de l'équation $f(u, \mathrm{U}) = 0$. A la vérité, j'ai donné ([4]) une méthode générale pour trouver le genre d'une courbe algébrique, quelles que soient ses singularités; mais il y a avantage à pouvoir se dispenser de cette recherche. Je terminerai en indiquant sommairement les moyens

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier; *Théorie des Fonctions elliptiques*, 2^e édition, p. 381.

([2]) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (autographié), année 1873; *Proceedings of the London mathematical Society*, t. IV, 1873.

([3]) *Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. XII, p. 186.

([4]) *Ibid.*, p. 156; *Mathematische Annalen*, t XXIII, 1884.

d'obtenir par des opérations purement algébriques l'expression de la fonction u quand on a reconnu qu'elle est uniforme.

I.

Désignons par $f_k(u)$ un polynôme entier en u, de degré au plus égal à $2k$, et soit

$$\begin{aligned} U^m + U^{m-1} f_1(u) + \ldots + U^{m-k} f_k(u) + \ldots \\ + U^2 f_{m-2}(u) + U f_{m-1}(u) + f_m(u) = 0 \end{aligned}$$

une équation algébrique entre une fonction u et sa dérivée $U = \frac{du}{dz}$. Je vais donner du genre p de cette équation une expression dont j'aurai à faire usage.

Je partirai de la formule de Riemann

$$2(p + m - 1) = \Sigma\Sigma(r - 1) = N,$$

dans laquelle r désigne le nombre des racines qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction U. La sommation indiquée s'étend : 1° à tous les systèmes circulaires formés par les valeurs finies ou infinies que prend U en un point critique; 2° à tous les points critiques de la fonction U, qu'ils soient situés à l'infini ou à distance finie.

Occupons-nous d'abord des derniers. Soit b_i l'un des points où plusieurs racines deviennent égales : les unes seront différentes de zéro et fourniront à la somme N une partie M_i; les autres seront nulles. Elles pourront être par rapport à $(u - b_i)$ de degré inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

Soit r_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré inférieur à l'unité; leur degré étant au plus égal à $1 - \frac{1}{r_{ij}}$, nous le représenterons par $\left(1 - \frac{1 + h_{ij}}{r_{ij}}\right)$. Le produit de ces r_{ij} racines est du degré $r_{ij}\left(1 - \frac{1 + h_{ij}}{r_{ij}}\right) = (r_{ij} - 1 - h_{ij})$, et la partie de la somme N qui provient de ce système est $(r_{ij} - 1)$.

Soit s_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré égal à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré s_{ij}, et la partie correspondante de la somme N est $(s_{ij} - 1)$.

Soit t_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré $\left(1 + \frac{1 + l_{ij}}{t_{ij}}\right)$, supérieur à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré $(t_{ij} + 1 + l_{ij})$, et la partie correspondante de la somme N est $(t_{ij} - 1)$.

D'après cela, le produit de toutes les racines $U = 0$ qui correspondent à $u = b_i$ est du degré

$$\sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_j s_{ij} + \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}).$$

Si b_i est une racine d'ordre β_i de l'équation $f_m(u) = 0$, le produit des racines de l'équation proposée $F(u, U) = 0$ est du degré de $(u - b_i)^{\beta_i}$, c'est-à-dire du degré β_i : on a donc

$$(1) \qquad \sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_j s_{ij} + \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}) = \beta_i.$$

La partie N_i de la somme N qui provient du point critique b_i a pour expression

$$(2) \qquad N_i = M_i + \sum_j (r_{ij} - 1) + \sum_j (s_{ij} - 1) + \sum_j (t_{ij} - 1).$$

Ajoutons membre à membre toutes les relations, telles que (1), relatives aux points critiques b_i, et désignons par β le degré du polynôme $f_m(u)$; il vient

$$(3) \qquad \sum_i \sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_i \sum_j s_{ij} + \sum_i \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}) = \beta.$$

De même, ajoutons membre à membre les diverses relations, telles que (2), relatives aux divers points critiques b_i; il vient

$$(4) \qquad \sum N_i = \sum_i M_i + \sum_i \sum (r_{ij} - 1) + \sum_i \sum (s_{ij} - 1) + \sum_i \sum (t_{ij} - 1).$$

Pour étudier les points critiques situés à l'infini, posons $u = \frac{1}{v}$, et introduisons, à la place de U, la dérivée $V = \frac{dv}{dz}$; on a

$$U = -\frac{V}{v^2} = -V u^2.$$

Donc, si, pour une valeur de u, r valeurs de V deviennent égales et forment un système circulaire, r valeurs de U deviendront aussi égales pour cette même valeur de u et formeront un système circulaire. Nous n'avons à considérer que les systèmes circulaires formés par les valeurs de V qui correspondent à $u = \infty$ ou à $v = 0$. Ils sont déterminés par l'équation

$$(-V)^m + v^2 f_1\left(\frac{1}{v}\right)(-V)^{m-1} + \ldots - v^{2m-2} f_{m-1}\left(\frac{1}{v}\right)V + v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0.$$

Pour $v = 0$, cette équation peut admettre des racines égales. A celles qui ne sont pas nulles correspond une partie M' de la somme N.

Quant aux racines $V = 0$, soit r'_j le nombre de celles qui composent un des systèmes circulaires de degré $\left(1 - \frac{1+h'_j}{r'_j}\right)$ inférieur à l'unité : leur produit est du degré $r'_j\left(1 - \frac{1+h'_j}{r'_j}\right) = (r'_j - 1 - h'_j)$, et la partie correspondante de la somme N est $(r'_j - 1)$.

Soit s'_j le nombre des racines $V = 0$ qui composent un système circulaire de degré égal à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré s'_j, et la partie correspondante de la somme N est $(s'_j - 1)$.

Soit t'_j le nombre des racines $V = 0$ qui composent un système circulaire de degré $\left(1 + \frac{1+l'_j}{t'_j}\right)$ supérieur à l'unité : le produit de ces racines est du degré $(t'_j + 1 + l'_j)$, et la partie correspondante de N est $(t'_j - 1)$.

D'après cela, le produit de toutes les racines $V = 0$ est du degré

$$\sum(r'_j - 1 - h'_j) + \sum_j s'_j + \sum_j (t'_j + 1 + l'_j).$$

Ce degré étant égal à l'ordre de multiplicité $2m - \beta$ de la racine $V = 0$

cines $V=0$ de degré supérieur à l'unité. Nous aurons

$$\sum_i\sum_j(s_{ij}-1)=\sum_i\sum_j s_{ij}-\sigma,\quad \sum_j(s'_j-1)=\sum_j s'_j-\sigma,$$
$$\sum_i\sum_j(t_{ij}-1)=\sum_i\sum_j t_{ij}-\tau,\quad \sum_j(t'_j-1)=\sum_j t'_j-\tau'.$$

La formule (8) devient alors

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 2(p+m-1)=&\sum_i \mathrm{M}_i+\sum_i\sum_j(r_{ij}-1)+\sum_i\sum_j s_{ij}-\sigma+\sum_i\sum_j t_{ij}-\tau\\ &+\mathrm{M}'+\sum_j(r'_j-1)+\sum_j s'_j-\sigma'+\sum_j t'_j-\tau'.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant membre à membre les deux équations (7) et (9), le terme $2m$ disparaît, ainsi que plusieurs autres, et il reste

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} 2(p-1)=&\sum_i \mathrm{M}_i+\mathrm{M}'+\sum_i\sum_j h_{ij}+\sum_j h'_j\\ &-\sum_i\sum_j(1+l_{ij})-\sum_j(1+l'_j)-(\sigma+\sigma'+\tau+\tau').\end{aligned}\right.$$

C'est la formule que nous avions en vue d'obtenir.

Pour en déduire la proposition de M. Hermite, nous allons rappeler les conditions trouvées par MM. Briot et Bouquet. Les voici :

Pour que l'équation irréductible

$$\mathrm{U}^m+\mathrm{U}^{m-1}f_1(u)+\ldots+f_m(u)=0$$

admette une intégrale uniforme, il faut et il suffit :

1° Que les coefficients $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)$ soient des polynômes entiers, et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, ..., le dernier du degré $2m$;

2° Que chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, reste uniforme par rapport à u;

3° Que chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité soit du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient;

donc, quand l'intégrale est uniforme, les racines $U = o$ et les racines $V = o$ de degré égal à l'unité forment en tout deux systèmes circulaires, et deux seulement ([1]).

Deuxième cas : $\sigma = \sigma' = o$. — La formule (11) devient

$$2 = \sum_i \sum_j (1 + l_{ij}) + \sum_j (1 + l'_j) + \tau + \tau'.$$

Il est impossible que τ et τ' soient tous deux différents de zéro; car, si cela était, les deux premiers termes du second membre subsisteraient; par suite, ce second membre serait supérieur ou égal à 4.

Soit donc, par exemple, $\tau' = o$. Le terme $\Sigma(1 + l'_j)$ disparaît : il vient

$$2 = \sum_i \sum_j (1 + l_{ij}) + \tau,$$

ce qui exige $\tau = 1$ et $l_{ij} = o$. L'hypothèse $\tau = o$ donnerait $\tau' = 1$ et $l'_j = o$.

Ainsi, quand l'intégrale est uniforme, il n'y a qu'un seul système circulaire de racines $U = o$ ou un seul système de racines $V = o$ qui soient de degré supérieur à l'unité ([2]); et, si ce système comprend t racines, elles sont du degré $1 + \frac{1}{t}$ ([3]).

II.

Nous allons maintenant revenir à la formule générale (10) pour la comparer successivement avec trois théorèmes que nous avons établis dans notre travail déjà cité (p. 181-186). Pour la définition des paramètres c et c'_0 et les trois formes de l'équation $f(u, U) = o$, nous renvoyons au premier Chapitre de ce Mémoire.

THÉORÈME I. — *Pour que l'intégrale d'une équation différentielle algé-*

---

(1) *Théorie des Fonctions elliptiques*, p. 402, *Remarque*.

(2) *Ibid.*

(3) *Ibid.*, p. 385-386.

brique $F(u, U) = 0$ *soit uniforme et doublement périodique, il faut et il suffit : 1° que les paramètres* c *et* c'_0 *soient tous nuls; 2° que l'équation proposée soit du genre un.*

THÉORÈME II. — *Pour que l'intégrale soit rationnelle, il faut et il suffit que l'équation* $F(u, U) = 0$ *vérifie les conditions suivantes : 1° un au moins des paramètres* c *et* c'_0 *est infini; aucun d'eux n'est fini et différent de zéro; 2° une seule valeur de* u *vérifie à la fois les deux équations* $\frac{u}{U} = \infty$ *et* $\frac{du}{dU} = \infty$; *3° si cette solution est* $u = b$, *les* p *valeurs de* U *qui deviennent nulles avec* $u - b$ *et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en* $(u - b)^{1+\frac{1}{p}}$ *et ne contient pas de terme en* $(u - b)^{1+\frac{2}{p}}$. *Si cette solution est* $\frac{1}{u} = v = 0$, *les* p *valeurs de* V *qui deviennent nulles avec* v *et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en* $v^{1+\frac{1}{p}}$ *et ne contient pas de terme en* $v^{1+\frac{2}{p}}$; *4° l'équation* $F(u, U) = 0$ *est du genre zéro.*

THÉORÈME III. — *Pour que l'intégrale soit uniforme et simplement périodique, il faut et il suffit que l'équation* $F(u, U) = 0$ *vérifie les conditions suivantes : 1° aucun des paramètres* c *et* c'_0 *n'est infini; les valeurs de* U *qui deviennent nulles pour des valeurs finies de* u *et sont de degré égal à l'unité, ainsi que celles de* V *qui deviennent nulles pour* $v = 0$ *et sont de degré égal à l'unité, forment en tout deux systèmes circulaires; 2° l'équation* $F(u, U) = 0$ *est du genre zéro.*

Dans le cas où les paramètres c et c'_0 sont tous nuls, que faut-il pour que l'équation proposée soit du genre un? Par hypothèse, il n'y a pas de racine $U = 0$ ou $V = 0$ qui soit d'un degré supérieur à l'unité. Donc $\sigma = \sigma' = \tau = \tau' = 0$. Par suite, les termes $\Sigma\Sigma(1 + l_{ij})$ et $\Sigma(1 + l'_j)$ disparaissent. La formule (10) devient

$$0 = \sum_i M_i + M' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum h'_j.$$

On en conclut $M_i = M' = 0$ et $h_{ij} = h'_j = 0$. Donc d'abord toutes les

racines multiples différentes de zéro sont uniformes aux environs des points critiques; en outre, toute racine nulle est de degré $1 - \frac{1}{r_{ij}}$, si elle appartient à un système composé de r_{ij} racines.

Dans le cas où les paramètres c et c'_0 sont tous finis et n'ont que deux valeurs distinctes, il n'y a aucune racine d'ordre supérieur à l'unité. Donc $\tau = \tau' = 0$; les deux termes mentionnés plus haut disparaissent encore. Enfin la somme $\sigma + \sigma'$ est égale à 2.

Que faut-il pour que le genre soit zéro? La formule (10) se réduit dans le cas présent à

$$0 = \sum_i \mathrm{M}_i + \mathrm{M}' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum_j h'_j.$$

On en tire les mêmes conclusions que précédemment.

Supposons enfin qu'aucun des paramètres c et c'_0 n'est différent de zéro, qu'un seul d'entre eux est infini, et que les t racines nulles forment un système circulaire unique du degré $1 + \frac{1}{t}$, c'est-à-dire que $\tau + \tau'$ est égal à 1 et que σ et σ' sont nuls.

Que faut-il pour que le genre soit égal à zéro?

Supposons d'abord $\tau = 1$, $\tau' = 0$. Le terme $\Sigma(1 + h'_j)$ disparait; le terme $\Sigma\Sigma(1 + l_{ij})$ se réduit à l'unité, et il vient

$$0 = \sum_i \mathrm{M}_i + \mathrm{M}' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum_j h'_j;$$

d'où les mêmes conclusions que précédemment. On les retrouverait encore en supposant $\tau = 0$ et $\tau' = 1$.

En résumé, quand une équation $f(u, \mathrm{U}) = 0$ de l'espèce considérée vérifie, abstraction faite de son genre, les conditions de nos trois théorèmes, la condition relative au genre revient dans tous les cas aux suivants :

1° Chaque racine U, tant qu'elle ne devient pas nulle, est une fonction uniforme de u;

2° Chaque racine nulle et d'un degré inférieur à l'unité est du degré $1 - \frac{1}{p}$, si elle fait partie d'un système circulaire de p racines;

3° L'équation transformée $f\left(\frac{1}{v}, -\frac{V}{v^2}\right) = 0$ présente pour $v = 0$ les mêmes caractères.

On peut vérifier ces conditions par de simples divisions et éliminations, ainsi que je l'ai montré antérieurement. Je vais indiquer un nouveau moyen, plus simple, de reconnaître que les racines U et V (pour $v = 0$) restent uniformes, tant qu'elles ne s'annulent pas. Je ferai usage de quelques lemmes qu'il suffira d'énoncer à raison de leur évidence immédiate.

Lemme I. — *Étant donnée une fonction algébrique y qui admet n déterminations pour chaque valeur de la variable x, si au point $x = 0$ plusieurs de ces déterminations deviennent égales, pour qu'elles soient aux environs de l'origine des fonctions uniformes de x, il faut et il suffit que celles des différences $y_k - y_l$ qui deviennent nulles pour $x = 0$ soient toutes de degré entier par rapport à x.*

Lemme II. — *Si, au point $x = 0$, l'une des déterminations y_n de y devient nulle, les $n - 1$ différences $\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_n}$ deviennent infinies en ce point.*

Il n'y a d'exception que si la différence $y_n - y_k$ est nulle elle-même avec x, et si son degré est au moins double du degré commun de y_n et de y_k.

Lemme III. — *Si pour $x = 0$ plusieurs déterminations de y deviennent égales, les unes étant nulles, les autres différentes de zéro, pour que ces dernières soient aux environs de l'origine des fonctions uniformes de x, il faut et il suffit (sous réserve du cas d'exception) que celles des différences $\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_l}$ qui deviennent nulles pour $x = 0$ soient toutes de degré entier par rapport à x.*

Cette proposition est une conséquence des deux précédentes.

Lemme IV. — *Étant donnée une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, si pour $x = 0$ plusieurs déterminations de y deviennent nulles, et sont du même degré $\frac{q}{p}$ (q étant premier avec p), si de plus elles se distribuent en systèmes circulaires composés chacun de p racines, leurs développements en série diffèrent dès le premier terme.*

En effet, ayant posé $x = x'^p$, $y = tx'^q$, l'équation $f(x'^p, tx'^q) = 0$ se réduit pour $x' = 0$ à une équation en t dont toutes les racines sont simples; car, si deux d'entre elles étaient égales, les racines ne seraient séparées que par une approximation ultérieure, et l'un au moins des systèmes circulaires qu'elles formeraient se composerait de racines en nombre égal non à p, mais à un multiple de p.

Cela posé, on formera l'équation dont les racines w sont les différences $\frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_l}$ des inverses des racines de l'équation proposée. Soit $\varphi(w, u) = 0$ cette équation, et $\psi(u)$ l'ensemble de ses termes indépendants de w. Il suffit évidemment d'effectuer un certain nombre de divisions algébriques pour former les polygones de Newton relatifs aux diverses racines w qui deviennent nulles avec le polynôme $\psi(u)$, et par suite pour trouver leurs degrés.

Soit $u = b$ une racine de $\psi(u)$. Si pour $u = b$ l'équation proposée n'admet pas de racines U égales à zéro, les valeurs $\frac{1}{U_k}$, $\frac{1}{U_l}$ sont assimilables aux racines y_k, y_l considérées dans le lemme I. Pour que toutes les racines U restent uniformes aux environs du point b, il faut et il suffit que les racines w nulles avec $(u - b)$ soient toutes de degré entier par rapport à $(u - b)$.

Si pour $u = b$ l'équation proposée admet à la fois des racines multiples différentes de zéro et des racines nulles, nous supposerons d'abord que ces racines ne soient pas d'un degré égal à l'unité.

A deux racines nulles U_k, U_l de degré différent, correspondent dans l'équation en w des racines infinies (lemme II). Deux racines U_k, U_l nulles et de même degré sont dans les conditions du lemme IV : leurs développements diffèrent dès le premier terme. Le cas d'exception du lemme II se trouve écarté. Le lemme IV est donc applicable, en assimilant U_k et U_l à y_k et à y_l. Ainsi il faut et il suffit que les racines w nulles avec $(u - b)$ soient toutes de degré entier.

Supposons enfin que pour $u = b$ l'équation proposée admette des racines multiples différentes de zéro, et des racines nulles, dont plusieurs pourront être de degré égal à l'unité. Celles-ci ne peuvent, comme on sait, former plus de deux systèmes circulaires. Or on connaît en fonction rationnelle des coefficients de l'équation proposée les deux valeurs de u telles que b. On pourra donc séparer les racines

nulles de degré égal à l'unité et compter combien de couples de ces racines (U_k, U_l) auront une différence de degré supérieur à 2. Soit n ce nombre. L'équation en w admettra $2n$ racines nulles de degré fractionnaire, ni plus ni moins. Sauf ces $2n$ racines de degré fractionnaire, toutes les racines nulles de l'équation en w sont, d'après ce qui précède, de degré entier par rapport à $(u - b)$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que les racines U qui deviennent égales sans s'annuler au point $u = b$ soient uniformes aux environs de ce point.

Le cas d'exception que nous venons de traiter ne peut se présenter que si l'intégrale, supposée uniforme, est simplement périodique.

On n'aura qu'à répéter sur l'équation transformée les opérations ci-dessus indiquées pour s'assurer que les racines V restent uniformes aux environs du point $v = 0$ tant qu'elles ne s'annulent pas.

III.

Ayant reconnu que l'intégrale u est uniforme, voici comment on pourra l'obtenir.

Dans un important Mémoire [1] publié récemment, M. Nœther a montré qu'on peut, par de simples opérations algébriques et sans résoudre aucune équation de degré supérieur à 1, obtenir toutes les courbes adjointes d'une courbe donnée, quelles que soient ses singularités. Par suite, on saura exprimer en fonction d'un paramètre les coordonnées de toute courbe de genre zéro ou un.

Si donc la fonction u est rationnelle ou simplement périodique, l'équation $f(u, U) = 0$ étant alors du genre zéro, on sera ramené à intégrer une différentielle rationnelle [2].

Si la fonction u est doublement périodique, l'équation $f(u, U) = 0$ est du genre un : on aura

$$u = \psi[t, \sqrt{R(t)}], \quad U = \chi[t, \sqrt{R(t)}],$$

---

(1) *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XXIII, 1884).

(2) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 145 et suiv.

$R(t)$ représentant un polynôme entier du quatrième degré,

$$R(t) = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4.$$

Pour achever, par des opérations purement algébriques, la solution de notre problème, il convient d'introduire la fonction $\wp$ de M. Weierstrass, qui effectue l'inversion sans exiger la connaissance des racines de l'équation $R(t) = 0$. Nous emploierons les formules que M. Halphen vient de publier dans le LIV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 171-173).

Désignons par I_2 et I_3 les deux invariants de $R(t)$, et posons

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2} I_2, \quad g_3 = \frac{1}{a_0^3} I_3.$$

La fonction $\wp\xi$ de la variable ξ étant définie par l'équation

$$\wp'^2\xi = 4\wp^3\xi - g_2\wp\xi - g_3,$$

et la constante η par les deux relations concordantes

$$\wp\eta = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \quad \wp'\eta = \frac{a_3 a_0^2 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3},$$

on aura, d'après M. Halphen,

$$t = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\xi - \wp'\eta}{\wp\xi - \wp\eta}, \quad \sqrt{R(t)} = \sqrt{a_0}\,[\wp(\xi + \eta) - \wp\xi],$$

ou, en remplaçant $\wp(\xi + \eta)$ par sa valeur connue,

$$\sqrt{R(t)} = \sqrt{a_0}\,\frac{(6\wp^2\xi - \frac{1}{2}g_2)(\wp\eta - \wp\xi) + 4\wp^3\xi - g_2\wp\xi - g_3 - \wp'\xi\,\wp'\eta}{2(\wp\xi - \wp\eta)^2}.$$

Par suite, l'intégrale u sera exprimée en fonction de $\wp\xi$ et de $\wp'\xi$; or ξ est une fonction linéaire de z. L'intégration sera donc effectuée, dans ce cas comme dans les précédents, sans qu'on ait eu à résoudre aucune équation algébrique.

MÉMOIRE

SUR LA

COMPOSITION DE POLYNOMES ENTIERS

QUI N'ADMETTENT

QUE DES DIVISEURS PREMIERS D'UNE FORME DÉTERMINÉE

(Suite);

PAR M. A. LEFÉBURE,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, INSPECTEUR D'ACADÉMIE HONORAIRE.

CINQUIÈME PARTIE.

Les polynômes $\Pi_{nms\ldots r}$ peuvent être compris dans une formule générale. Soient toujours

$$R = nms\ldots r, \qquad T = n^t m^h s^k \ldots r^\gamma,$$
$$U = C^{n^{t-1} m^{h-1} s^{k-1} \ldots r^{\gamma-1}}, \quad V = D^{n^{t-1} m^{h-1} s^{k-1} \ldots r^{\gamma-1}},$$

λ le nombre des facteurs de R; C, D des nombres quelconques premiers entre eux. Désignons par $P_{\rho,R}(U,V)$ le produit de facteurs représentés par $U^\mu - V^\mu$, dans lesquels μ exprime successivement toutes les combinaisons ρ à ρ des λ facteurs de R. Ainsi l'on a

$$P_{2,nmr}(U,V) = (U^{nm} - V^{nm})(U^{nr} - V^{nr})(U^{mr} - V^{mr}),$$
$$P_{1,nmr}(U,V) = (U^n - V^n)(U^m - V^m)(U^r - V^r),$$
$$P_{0,nmr}(U,V) = U - V.$$

Les polynômes Π_R sont donnés par la formule suivante :

$$\Pi_R = \frac{P_{\lambda,R}(U,V)\ldots P_{3,R}(U,V)\,P_{1,R}(U,V)}{P_{(\lambda-1),R}(U,V)\ldots P_{2,R}(U,V)\,P_{0,R}(U,V)}. \tag{11}$$

Les indices λ, λ, 2, ..., 3, 1 des facteurs du numérateur sont de

même parité, il en est de même pour le dénominateur. Pour fixer les idées, j'ai supposé λ impair, de sorte que les indices impairs sont au numérateur, et les indices pairs au dénominateur.

Lorsque T est impair dans les diviseurs $H'T+1$ qui composent Π_n, on obtient de nouveaux polynômes dont les diviseurs sont toujours de même forme, si l'on change V en $-V$ dans la formule (11).

La démonstration de cette proposition est analogue à celle qui a conduit à cette formule. Elle présente seulement quelques modifications dans le cas où T ne contient qu'un seul facteur n^t; cas qui a été l'objet de la première Partie de ce Mémoire. Je vais m'y arrêter.

On a démontré, dans cette première Partie, que les diviseurs premiers de la fonction $F_n(U,V)$, c'est-à-dire de

$$U^{n-1}+U^{n-2}V+\ldots+UV^{n-2}+V^{n-1},$$

dans laquelle $U=C^{n^{t-1}}$, $V=D^{n^{t-1}}$, sont de la forme $H'n^t+1$. Je me propose d'établir que le polynôme $U^{n-1}-U^{n-2}V+\ldots-UV^{n-2}+V^{n-1}$, que je représente par $F_n(U,-V)$, a pour diviseurs premiers des nombres de même forme $H'n^t+1$.

Je suppose $D=1$, d'où $V=1$; le cas général, où D aurait toute autre valeur, s'en déduirait, comme on l'a vu dans la première Partie.

Soit p un diviseur premier quelconque de $F_n(U,-V)$, il est de la forme $Hn+1$; je démontre d'abord que H est un multiple de n. En effet, on a

$$F_n(U,-1)\equiv 0 \pmod p,\quad U^n+1\equiv 0 \pmod p.$$

Cette dernière relation s'obtient en multipliant $F_n(U,-1)$ par $U+1$. U est une puissance $n^{\text{ième}}$; soit a_m le résidu de U divisé par p, a désignant la base des résidus, on a

$$U\equiv a_m \pmod p,\quad a_{mn}=p-1.$$

Cette valeur du résidu a_{mn} se déduit de la relation $U^n+1\equiv 0 \pmod p$. a_m ne peut être le résidu négatif -1, ou, en d'autres termes, $p-1$, car $F_n(U,-1)\equiv 0 \pmod p$ donnerait $n\equiv 0 \pmod p$, ce qui est impossible. Ainsi l'on ne peut avoir $m=\frac{H}{2}$; a_m ne peut être l'unité, car, en l'élevant à la puissance $n^{\text{ième}}$, le résidu a_{mn}, que l'on obtiendrait, serait

La dernière relation se déduit de $C^{n^t} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Le résidu $a_{sn^{t-1}}$ ne peut être le résidu négatif -1, car, s'il était -1, la relation

$$F_n(C^{n^{t-1}}, -1) \equiv 0 \pmod{p}$$

donnerait

$$n \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible. Mais, si on l'élève à la puissance $n^{\text{ième}}$, il conduit au résidu -1, en vertu des $a_{sn^{t-1}} = -1$. Donc $a_{sn^{t-1}}$ est l'un des résidus de la série

$$a_{\frac{H}{2n}} + a_{\frac{H}{2n}+\frac{H}{n}} + \ldots + a_{\frac{H}{2n}+(n-1)\frac{H}{n}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cette série fait partie des $\frac{H}{r}$ séries mentionnées à la première Partie, qui comprennent tous les résidus, et dans lesquels on fait $r = n$. C'est celle dont les termes, élevés à la puissance $n^{\text{ième}}$, donnent le résidu -1. En effet, on a

$$\left(a_{\frac{H}{2n}+\alpha\frac{H}{n}}\right)^n \equiv a_{\frac{H}{2}+\alpha H} \pmod{p}, \quad a_{\frac{H}{2}+\alpha H} = -1.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on doit avoir

$$a_{sn^{t-1}} = a_{\frac{H}{2n}+\alpha\frac{H}{n}}, \quad s_{n^{t-1}} = \frac{H}{2n} + \frac{\alpha H}{n} + \varepsilon H, \quad 2sn^{t-1} = H(1 + 2\alpha + 2\varepsilon n).$$

En désignant par α un nombre qui ne peut dépasser $n-1$; $1 + 2\alpha$ ne peut être divisible par n, car la plus grande valeur de α étant $n-1$, celle de $1 + 2\alpha$ est $2n-1$. Donc, si $1 + 2\alpha$ était divisible par n, on aurait

$$1 + 2\alpha = n$$

et, par suite, il viendrait

$$a_{sn^{t-1}} = a_{\frac{H}{2}}, \quad a_{sn^{t-1}} = -1,$$

égalités qui n'ont pas lieu, car on a établi précédemment que $a_{sn^{t-1}}$ ne peut être le résidu -1. Ainsi $1 + 2\alpha$ n'est pas divisible par n : il résulte donc de l'égalité $2sn^{t-1} = H(1 + 2\alpha + 2\varepsilon n)$ que H est divisible par n^{t-1}, et, par suite, que p est de la forme $H'n^t + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, T impair, et nous venons

de voir qu'en changeant V en $-V$ dans la formule (11), on obtient encore des polynômes dont les diviseurs sont de la forme $H'T+1$.

Quand T est pair, la formule (11) donne aussi des polynômes dont les diviseurs sont de la forme $H'T+1$, mais en y introduisant une modification; R dans cette formule ne devra pas comprendre le facteur 2. Posons

$$R = 2R_1, \quad R_1 = ms\ldots r,$$

les nouveaux polynômes seront donnés par la formule suivante :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi_R = \frac{P_{(\lambda-1),R_1}(U,-V)\ldots P_{2,R_1}(U,-V)\,P_{0,R_1}(U,-V)}{P_{(\lambda-2),R_1}(U,-V)\ldots P_{1,R_1}(U,-V)},\\ &U = C^{2^{t-1}m^{h-1}s^{k-1}\ldots r^{\gamma-1}}, \quad V = D^{2^{t-1}m^{h-1}s^{k-1}\ldots r^{\gamma-1}}.\end{aligned}\right.$$

En effet, comme R_1 est impair, il résulte de ce qui précède que le second membre de la relation (12), et par conséquent Π_R, a pour diviseurs des nombres de la forme $H'm^hs^k\ldots r^\gamma+1$. Il reste à établir qu'ils sont aussi de la forme $H'.2^t+1$: ils seront alors de la forme $H'.2^tm^hs^k\ldots r^\gamma+1$, $H'T+1$.

De la relation (12) on déduit l'égalité

$$U^{R_1}+V^{R_1} = L\Pi_R,$$

en appelant L le multiplicateur de Π_R, et en remarquant que

$$P_{(\lambda-1),R_1}(U,-V)$$

est égal à

$$U^{R_1}+V^{R_1}.$$

L est un polynôme entier, comme on le reconnaitra plus loin.

Je pose

$$C^{m^hs^k\ldots r^\gamma} = C_1, \quad D^{m^hs^k\ldots r^\gamma} = D_1, \quad \text{d'où} \quad U^{R_1} = C_1^{2^{t-1}}, \quad V^{R_1} = D_1^{2^{t-1}},$$

on en déduit

$$C_1^{2^{t-1}}+D_1^{2^{t-1}} = L\Pi_R;$$

$C_1^{2^{t-1}}+D_1^{2^{t-1}}$ est la fonction $F_n(C_1^{n^{t-1}}, D_1^{n^{t-1}})$ dans laquelle on a $n=2$; on a vu dans la première Partie que les diviseurs de cette fonction sont de la forme $H'n^t+1$: donc les diviseurs de $C_1^{2^{t-1}}+D_1^{2^{t-1}}$ sont de la forme $H'.2^t+1$. Comme la démonstration qui a été donnée se modifie pour le

cas particulier de n égal à 2, je vais entrer dans quelques détails à ce sujet.

Je suppose $D_1 = 1$: le cas où D_1 aurait une valeur quelconque s'en déduit.

Soit p un diviseur quelconque de $C_1^{2^{t-1}} + 1$; il est de la forme $H.2 + 1$, comme tous les nombres premiers impairs, et ici je ne m'occupe pas du diviseur 2. On a

$$C_1^{2^{t-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

H est divisible par 2; en effet, soit a_u le résidu du carré $C_1^{2^{t-1}}$, obtenu en divisant ce carré par p, on a

$$a_u + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

En vertu de $C_1^{2^{t-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, a_u est donc le résidu négatif -1. On a vu, dans la première Partie, comment les $p-1$ premiers nombres $1, 2, \ldots, (p-1)$ se groupent en H séries de n nombres chacune, et telles que les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des n nombres d'une même série donnent lieu à un même résidu. Ici, pour $n = 2$, chaque série est composée de deux nombres dont la somme est p, et ces deux nombres sont nécessairement situés à égale distance des extrêmes de la suite $1, 2, \ldots, (p-1)$. L'une de ces séries est donc $1 + (p-1) = p$. Elle est formée de deux résidus, puisque l'unité est toujours résidu, et $(p-1)$ est le résidu a_u. Comme les deux termes de cette série sont résidus, il en résulte que H est divisible par 2, et, par suite, que p est de la forme $H'.2^2 + 1$.

Soit actuellement a_s le résidu que l'on obtient en divisant C_1^2 par p; on en déduit

$$C_1^2 \equiv a_s \pmod{p}, \quad C_1^{2^{t-1}} \equiv a_{s.2^{t-2}} \pmod{p}, \quad a_{s.2^{t-2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cette dernière relation s'obtient en vertu de $C_1^{2^{t-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$; $a_{s.2^{t-2}}$ est donc le résidu négatif -1, qui a pour expression $a_{\frac{H}{2}}$. On a donc les inégalités suivantes :

$$a_{s.2^{t-2}} = a_{\frac{H}{2}}, \quad s.2^{t-2} = \frac{H}{2} + \varepsilon H, \quad s.2^{t-1} = H(1 + 2\varepsilon).$$

Comme $1+2\varepsilon$ est impair, il résulte de ces égalités que H est divisible par 2^{t-1}, et par suite que p est de la forme $H'.2^t+1$.

Ainsi les diviseurs de $C_1^{2^{t-1}}+D_1^{2^{t-1}}$ sont de la forme $H'.2^t+1$; il en est donc de même pour ceux de Π_R, en vertu de la relation $C_1^{2^{t-1}}+D_1^{2^{t-1}}=L\Pi_R$ indiquée plus haut. Les diviseurs de Π_R dans la relation (12) sont donc de la forme $H'T+1$, ce qu'il fallait établir.

SIXIÈME PARTIE.

Je me propose de rechercher la composition des polynômes de la forme U^R-V^R, dans lesquels on a

$$U=C^{n^{t-1}m^{h-1}s^{k-1}\ldots r^{\gamma-1}},\quad V=D^{n^{t-1}m^{h-1}s^{k-1}\ldots r^{\gamma-1}},\quad R=nms\ldots r.$$

Désignons par λ le nombre des facteurs de R; l'égalité (11) donne, en vertu de $P_{\lambda,R}(U,V)=U^R-V^R$,

$$(13)\qquad U^R-V^R=\frac{P_{(\lambda-1),R}(U,V)\ldots P_{2,R}(U,V)\,P_{0,R}(U,V)}{P_{(\lambda-2),R}(U,V)\ldots P_{1,R}(U,V)}\,\Pi_R.$$

Si l'on considère les cas de $\lambda=2$, $R=nm$; $\lambda=3$, $R=nmr$, on a

$$U^{nm}-V^{nm}=\frac{P_{1,nm}(U,V)}{P_{0,nm}(U,V)}\,\Pi_{nm},$$
$$P_{1,nm}(U,V)=(U^n-V^n)(U^m-V^m),$$
$$P_{0,nm}(U,V)=U-V;$$

d'où l'on déduit

$$U^{nm}-V^{nm}=\frac{(U^n-V^n)(U^m-V^m)}{U-V}\,\Pi_{nm},\quad U^{nm}-V^{nm}=(U-V)\Pi_n\Pi_m\Pi_{nm}.$$

On a également

$$U^{nmr}-V^{nmr}=\frac{P_{2,nmr}(U,V)\,P_{0,nmr}(U,V)}{P_{1,nmr}(U,V)}\,\Pi_{nmr},$$
$$P_{0,nmr}(U,V)=U-V,$$
$$P_{1,nmr}(U,V)=(U-V)^3\Pi_n\Pi_m R_r,$$
$$P_{2,nmr}(U,V)=(U-V)^3\Pi_n^2\Pi_m^2\Pi_r^2\Pi_{nm}\Pi_{nr}\Pi_{mr},$$

ce qui conduit à

$$U^{nmr}-V^{nmr}=(U-V)\Pi_n\Pi_m\Pi_r\Pi_{nm}\Pi_{nr}\Pi_{mr}\Pi_{nmr}.$$

Représentons d'une manière générale par $P_{\mu,R}\Pi$ le produit de facteurs de la forme Π_ρ, où l'indice ρ exprime successivement toutes les combinaisons μ à μ des facteurs $nms\ldots r$ de R. On a ainsi, par exemple,

$$P_{1,nmr}\Pi = \Pi_n \Pi_m \Pi_r, \quad P_{2,nmr}\Pi = \Pi_{nm}\Pi_{nr}\Pi_{mr};$$

en adoptant cette notation, la valeur de $U^{nmr} - V^{nmr}$ peut s'écrire comme il suit :

$$U^{nmr} - V^{nmr} = (U - V)(P_{1,nmr}\Pi)(P_{2,nmr}\Pi)(P_{3,nmr}\Pi).$$

La forme de ce développement du polynôme $U^R - V^R$, où R contient trois facteurs, se retrouve quel que soit le nombre des facteurs de R : c'est ce que je vais établir.

Soit $R = nms\ldots r$; λ le nombre des facteurs de R. Je suppose qu'il ait été démontré que cette forme de développement s'applique à toute expression, telle que $U^\mu - V^\mu$, où le nombre des facteurs de μ serait moindre que λ; je démontre que $U^R - V^R$, où le nombre des facteurs de R est λ, se compose de la même manière. Alors, comme la proposition est vraie quand le nombre des facteurs de μ est 1, 2, 3, elle sera encore vraie pour quatre facteurs, pour cinq facteurs, et ainsi de suite.

Pour obtenir les égalités qui suivent, je fais usage des nombres de combinaisons que donnent successivement λ, $\lambda - 1$, $\lambda - 2$, ... lettres, prises 2 à 2, 3 à 3, ... Je désigne par 1, λ, λ_1, λ_2, ..., λ_2, λ_1, λ, 1 les coefficients du binôme $(\alpha + \beta)^\lambda$; pareillement par 1, a, a_1, ..., a_1, a, 1; par 1, b, b_1, ..., b_1, b, 1; par 1, c, c_1, ..., c_1, c, 1, ..., ceux des binômes $(\alpha + \beta)^a$, $(\alpha + \beta)^b$, $(\alpha + \beta)^c$, ... Pour fixer les idées, je suppose λ impair. On est conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&P_{0,R}(U,V) = (U - V)^1,\\
(14)\quad &\left\{\begin{aligned}
&P_{1,R}(U,V) = (U - V)^\lambda\,(P_{1,R}\Pi)^1,\\
&P_{2,R}(U,V) = (U - V)^{\lambda_1}(P_{1,R}\Pi)^a\,(P_{2,R}\Pi)^1,\\
&P_{3,R}(U,V) = (U - V)^{\lambda_2}(P_{1,R}\Pi)^{a_1}(P_{2,R}\Pi)^b\,(P_{3,R}\Pi)^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&P_{(\lambda-3),R}(U,V) = (U - V)^{\lambda_2}(P_{1,R}\Pi)^{a_2}(P_{2,R}\Pi)^{b_2}(P_{3,R}\Pi)^{c_2},\\
&P_{(\lambda-2),R}(U,V) = (U - V)^{\lambda_1}(P_{1,R}\Pi)^{a_1}(P_{2,R}\Pi)^{b_1}(P_{3,R}\Pi)^{c_1}\ldots(P_{(\lambda-2),R}\Pi)^1,
\end{aligned}\right.\\
&P_{(\lambda-1),R}(U,V) = (U - V)^\lambda\,(P_{1,R}\Pi)^a\,(P_{2,R}\Pi)^b\,(P_{3,R}\Pi)^c\ldots(P_{(\lambda-2),R}\Pi)^2\,(P_{(\lambda-1),R}\Pi)^g.
\end{aligned}$$

La suite des exposants de $U - V$ est formée de coefficients du bi-

nôme $(\alpha + \beta)^\lambda$, si l'on excepte le dernier coefficient qui est l'unité. Pareillement l'ensemble des exposants de $P_{1,R}\Pi$, $P_{2,R}\Pi$, $P_{3,R}\Pi$, ... représente respectivement les coefficients des binômes $(\alpha+\beta)^a$, $(\alpha+\beta)^b$, $(\alpha+\beta)^c$, . . ., moins les derniers coefficients. Si je remplace, dans l'expression du polynôme $U^R - V^R$ donné par l'égalité (13), $P_{0,R}(U,V)$, $P_{1,R}(U,V)$, ... par leurs valeurs déduites des égalités (14), on reconnaît que, dans le développement de $U^R - V^R$ ainsi obtenu, $U - V$, $P_{1,R}\Pi$, $P_{2,R}\Pi$, $P_{3,R}\Pi$, ... ont respectivement pour exposants

$$\lambda - \lambda_1 + \lambda_2 \ldots \lambda_1 - \lambda + 1,\quad a - a_1 + a_2 + \ldots + a - 1,$$
$$b - b_1 + b_2 - \ldots - b + 1,\quad c - c_1 + c_2 + \ldots + c - 1,\quad \ldots$$

Dans les différents binômes $(\alpha-\beta)^\lambda$, $(\alpha-\beta)^a$, $(\alpha-\beta)^b$, $(\alpha-\beta)^c$, ... je fais $\alpha = \beta = 1$; ces binômes deviennent nuls et conduisent aux égalités suivantes, en remarquant que λ, b, ... sont impairs, et que a, c, ... sont pairs :

$$1 = \lambda - \lambda_1 + \lambda_2 - \ldots - \lambda + 1,\qquad 1 = a - a_1 + \ldots + a - 1,$$
$$1 = b - b_1 - \ldots - b + 1,\qquad 1 = c - c_1 + \ldots + c - 1,\qquad \ldots;$$

les seconds membres sont les exposants de $U - V$, $P_{1,R}\Pi$, $P_{2,R}\Pi$, ... Donc ces exposants sont l'unité, et l'on obtient ainsi

$$U^R - V^R = (U - V)(P_{1,R}\Pi)(P_{2,R}\Pi)\ldots(P_{(\lambda-1),R}\Pi)(P_{\lambda,R}\Pi). \tag{15}$$

Telle est la forme générale du développement de $U^R - V^R$.

Dans ce développement, les diviseurs de $P_{1,R}\Pi$, $P_{2,R}\Pi$. . ., $P_{\lambda,R}\Pi$ sont respectivement, comme il a été dit, de la forme

$$H'n^t + 1,\ H'm^h + 1,\ \ldots;\ H'n^t m^h + 1,\ H'n^t s^k + 1,\ \ldots;$$
$$H'n^t m^h s^k \ldots r^\gamma + 1,\ H'T + 1.$$

L'égalité (13) donne un développement analogue du polynôme $U^R + V^R$, quand R est impair : il suffit d'y remplacer V par $-V$. Les mêmes raisonnements y conduisent. Ces raisonnements s'appliquent également à la relation (12), où R_1 est impair. Dans l'égalité $U^{R_1} + V^{R_1} = L\Pi_R$ qui s'en déduit, $L\Pi_R$ présente une composition pareille.

SEPTIÈME PARTIE.

La suite des nombres premiers de la forme $H'T+1$ est illimitée, quel que soit le nombre entier que T représente.

Cette proposition a été déjà démontrée par M. Genocchi d'une manière différente.

Si T est impair, il résulte des théorèmes exposés dans ce Mémoire que les polynômes U^R-V^R, U^R+V^R ont tous deux, parmi leurs diviseurs, des diviseurs de la forme $H'T+1$.

Supposons T pair, les polynômes U^R-V^R, $U^{R_1}+V^{R_1}$ ont aussi nécessairement des diviseurs de la forme $H'T+1$; $U^{R_1}+V^{R_1}$ est donné par la formule (12) qui a conduit à $U^{R_1}+V^{R_1}=L\Pi_R$. Dans cette formule, C et D sont quelconques, pourvu qu'ils soient premiers. Je puis donc y remplacer C et D par C^2 et D^2, et, par suite, U et V par U^2 et V^2; la relation $U^{R_1}+V^{R_1}=L\Pi_R$ prendra la forme $U^R+V^R=L'\Pi'_R$, puisque $R=2R_1$. Ainsi, si T est pair, les deux polynômes U^R-V^R, U^R+V^R ont encore des diviseurs de la forme $H'T+1$.

Cela posé, considérons les polynômes U^R-V^R, U^R+V^R, dans lesquels R est pair ou impair; ils ne peuvent avoir que 2 pour facteur commun; en effet, leur somme $2U^R$ et leur différence $2V^R$ n'ont que 2 pour diviseur commun, puisque U et V sont premiers entre eux. Donc les diviseurs premiers de la forme $H'T+1$ de U^R-V^R et U^R+V^R sont différents entre eux. Il en résulte que le produit $(U^R-V^R)(U^R+V^R)$ ou, en d'autres termes, $(U^2)^R-(V^2)^R$, contient au moins deux diviseurs de la forme $H'T+1$.

Les deux polynômes $(U^2)^R-(V^2)^R$, $(U^2)^R+(V^2)^R$ ont, comme les précédents, des diviseurs de la forme $H'T+1$, puisque, d'après les explications qui précèdent, C et D peuvent être remplacés par C^2, D^2 dans U^R+V^R, sans altérer la forme de ses diviseurs. Le produit $[(U^2)^R-(V^2)^R][(U^2)^R+(V^2)^R]$, c'est-à-dire $(U^{2^2})^R-(V^{2^2})^R$ a donc au moins trois diviseurs de la forme $H'T+1$, et ainsi de suite. Plus α, dans l'expression $(U^{2^\alpha})^R-(V^{2^\alpha})^R$, augmentera, plus le nombre de ses diviseurs de la forme $H'T+1$ sera considérable, et, comme rien ne limite α, la suite des nombres $H'T+1$ est aussi sans limites.

SUR LES

SURFACES A GÉNÉRATRICE CIRCULAIRE,

PAR M. G. DEMARTRES,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

1. Considérons un système invariable dont la position dans l'espace dépende d'un paramètre unique l, et soit OXYZ un trièdre trirectangle faisant partie de ce système. Le plan XOY enveloppe une surface développable et l'axe instantané de rotation relatif au point O se trouve dans un même plan avec OZ et la caractéristique du plan XOY. Supposons que OX ait été pris parallèle à cette caractéristique, on pourra passer d'une position du système à la position infiniment voisine par une translation égale et parallèle au déplacement du point O, suivie d'une rotation. Soient

$$u\,dl,\quad v\,dl,\quad w\,dl$$

les composantes du déplacement de O suivant OX, OY, OZ;

$$p\,dl,\quad r\,dl$$

les rotations composantes autour de OX, OZ.

Les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport à ces trois axes mobiles sont, en général, des fonctions de l et de deux autres variables φ, ψ, dont dépend le mouvement relatif du point; si l'on désigne par dx, dy, dz les différentielles totales de ces coordonnées, par δx, δy, δz les accroissements qu'elles acquièrent relativement

à un système d'axes fixes qui, avant le déplacement, coïncideraient avec les axes mobiles, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta x = dx + (u - ry)\,dl, \\ \delta y = dy + (v + rx - pz)\,dl, \\ \delta z = dz + (w + py)\,dl. \end{cases}$$

De même, si A, B, C désignent les cosinus directeurs, relativement à OX, OY, OZ, d'une direction variable, suivant une loi quelconque, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta A = dA - rB\,dl, \\ \delta B = dB + (rA - pC)\,dl, \\ \delta C = dC + pB\,dl. \end{cases}$$

Les quantités qui figurent dans ces formules ont un sens géométrique très simple.

Si l'on choisit pour l l'arc de la trajectoire du point O, u, v, w sont les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe, relativement aux axes mobiles; il est d'ailleurs préférable, pour ne pas écarter le cas où le point O serait fixe, de ne pas fixer *a priori* le sens de cette variable l.

Quant à $p\,dl$, $r\,dl$, ce sont évidemment les angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan XOY. Les équations de la caractéristique sont

$$z = 0, \quad w + py = 0.$$

Si l'on considère le point où cette droite coupe l'axe OY, on pourra calculer les variations de ses coordonnées à l'aide des relations (1); on aura de même les variations des cosinus directeurs de OX, en faisant $A = 1$, $B = C = 0$ dans les formules (2); on obtiendra ainsi les équations de la caractéristique infiniment voisine et, par suite, les coordonnées du point correspondant de l'arête de rebroussement; on trouve ainsi

$$z = 0, \quad w + py = 0, \quad x = -\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)',$$

un accent désignant, ici et dans la suite, une dérivée prise par rapport à l.

2. Considérons maintenant, dans le plan XOY, un cercle de centre O et de rayon variable R. Ce cercle, si R est une fonction de l seulement, engendrera une surface cerclée de l'espèce la plus générale, et toute ligne tracée sur cette surface pourra être considérée comme la trajectoire absolue d'un point M ayant, sur le cercle, un mouvement relatif déterminé. Soit φ l'angle MOX; les coordonnées de M étant $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$, o, nous aurons (1)

$$\begin{aligned}
\delta x &= u\,dl + (R'\cos\varphi - rR\sin\varphi)\,dl - R\sin\varphi\,d\varphi,\\
\delta y &= v\,dl + R'\sin\varphi\,dl + R\cos\varphi\,d\varphi + rR\cos\varphi\,dl,\\
\delta z &= (w + pR\sin\varphi)\,dl.
\end{aligned}$$

Nous poserons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
M &= u\cos\varphi + v\sin\varphi + R',\\
N &= rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi, \quad H^2 = M^2 + Q^2,\\
Q &= w + pR\sin\varphi,
\end{aligned}\right.$$

et nous aurons, en appelant δs le déplacement infiniment petit du point M, i l'inclinaison de ce déplacement sur la génératrice circulaire, le Tableau suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta x &= M\cos\varphi.dl - (N\,dl + R\,d\varphi)\sin\varphi,\\
\delta y &= M\sin\varphi.dl + (N\,dl + R\,d\varphi)\cos\varphi,\\
\delta z &= Q\,dl,\\
\delta s^2 &= (M^2 + Q^2)\,dl^2 + (N\,dl + R\,d\varphi)^2,\\
\delta s\sin i &= H\,dl,\\
\delta s\cos i &= N\,dl + R\,d\varphi.
\end{aligned}\right.$$

L'aire comprise entre deux cercles infiniment voisins est évidemment

$$(5)\qquad dS = R\,dl\int_0^{2\pi} H\,d\varphi.$$

C'est, comme on voit, une intégrale elliptique dans le cas général; elle s'obtient à l'aide des fonctions élémentaires si M et Q, envisagés comme fonctions de $\tang\frac{\varphi}{2}$, ont un facteur linéaire commun; nous verrons, dans la seconde Partie, que c'est la condition nécessaire et suffi-

sante pour que la génératrice considérée ait un point commun avec la génératrice infiniment voisine.

Observons aussi que les trajectoires orthogonales des génératrices ont pour équation

$$(r\mathrm{R} + v\cos\varphi - u\sin\varphi)\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi = 0.$$

Nous y reviendrons dans la seconde Partie.

3. *Courbure géodésique*. — La quatrième des équations (4) peut s'écrire

$$\delta s^2 = (\mathrm{H}^2 + \mathrm{N}^2)\,dl^2 + 2\mathrm{RN}\,dl\,d\varphi + \mathrm{R}^2\,d\varphi^2.$$

D'après la formule connue, si $\frac{1}{\rho_g}$ désigne la courbure géodésique d'un élément incliné d'un angle i sur la courbe $l =$ const., ω l'angle des deux lignes coordonnées, on a

$$\frac{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}}{\rho_g}\sin\omega = \frac{\partial(\mathrm{R}\cos i)}{\partial l} - \frac{\partial\left[\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}\cos(\omega - i)\right]}{\partial\varphi}.$$

Or ici

$$(6)\quad \sin\omega = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}},\quad \cos\omega = \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}},\quad \cos(\omega - i) = \frac{\mathrm{N}\cos i + \mathrm{H}\sin i}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}};$$

d'où

$$(7)\quad \frac{\mathrm{RH}}{\rho_g} = \frac{\partial(\mathrm{R}\cos i)}{\partial l} - \frac{\partial(\mathrm{N}\cos i + \mathrm{H}\sin i)}{\partial\varphi}.$$

Développons le second membre de cette équation et remplaçons-y $\sin i$, $\cos i$ par $\mathrm{H}\frac{dl}{ds}$, $\frac{\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi}{ds}$, il vient

$$\frac{ds\,\mathrm{RH}}{\rho_g} = \mathrm{R}'(\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi) - \frac{\partial\mathrm{N}}{\partial\varphi}(\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi) - \mathrm{H}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\varphi}dl$$
$$- \mathrm{RH}\frac{\partial i}{\partial l}dl + \mathrm{NH}\frac{\partial i}{\partial\varphi}dl - (\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi)\mathrm{H}\frac{\partial i}{\partial\varphi}.$$

Si nous tenons compte des relations (3), cette équation se simplifie et devient

$$(8)\quad \mathrm{RH}\frac{ds}{\rho_g} = \left(\mathrm{MN} - \mathrm{H}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\varphi}\right)dl + \mathrm{RM}\,d\varphi - \mathrm{RH}\,di.$$

On aura, d'après cela, les lignes géodésiques, en intégrant les deux équations simultanées

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\mathrm{MN} - \mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \varphi}\right)dl + \mathrm{RM}\,d\varphi - \mathrm{RH}\,di = 0,\\ &(\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi)\sin i = \mathrm{H}\,dl\cos i.\end{aligned}\right.$$

4. *Normales, plans tangents.* — Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au point $(l\varphi)$. Si nous écrivons que cette droite est normale à la génératrice et à sa trajectoire orthogonale, c'est-à-dire à deux droites ayant pour coefficients de direction, l'une

$$-\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad 0,$$

l'autre

$$\mathrm{M}\cos\varphi,\quad \mathrm{N}\sin\varphi,\quad 0;$$

en posant

$$(10)\qquad \mathrm{Q} = \mathrm{H}\sin\mathrm{V},\quad \mathrm{M} = \mathrm{H}\cos\mathrm{V},$$

nous aurons

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \sin\mathrm{V}\cos\varphi,\\ \mu &= \sin\mathrm{V}\sin\varphi,\\ \nu &= -\cos\mathrm{V}.\end{aligned}\right.$$

V est, par conséquent, l'angle que fait le plan tangent avec le plan de la génératrice; sa valeur est fournie par les relations (10). Quant à l'équation même du plan tangent, c'est

$$(12)\qquad \mathrm{X}\cos\varphi + \mathrm{Y}\sin\varphi - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Q}}z = \mathrm{R}.$$

Si l'on se déplace sur la surface, les variations des cosinus directeurs de la normale se calculeront en appliquant les relations (2) à λ, μ, ν, ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \cos\mathrm{V}\cos\varphi\,d\mathrm{V} - \sin\mathrm{V}\sin\varphi\,d\varphi - r\sin\mathrm{V}\sin\varphi\,dl,\\ \delta\mu &= \cos\mathrm{V}\sin\varphi\,d\mathrm{V} + \sin\mathrm{V}\cos\varphi\,d\varphi + r\sin\mathrm{V}\cos\varphi\,dl + p\cos\mathrm{V}\,dl,\\ \delta\nu &= \sin\mathrm{V}(d\mathrm{V} + p\sin\varphi\,dl).\end{aligned}$$

Nous poserons, pour simplifier (¹),

$$(13)\quad \begin{cases} -d\psi = d\varphi + r\,dl + p\cot V\cos\varphi\,dl, \\ d\chi = dV + p\sin\varphi\,dl, \end{cases}$$

et il viendra, en appelant $d\omega$ l'angle de deux normales infiniment voisines,

$$(14)\quad \begin{cases} \delta\lambda = \sin V\sin\varphi\,d\psi + \cos V\cos\varphi\,d\chi, \\ \delta\mu = -\sin V\cos\varphi\,d\psi + \cos V\sin\varphi\,d\chi, \\ \delta\nu = \sin V\,d\chi, \\ d\omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 V\,d\psi^2. \end{cases}$$

Le sens géométrique de l'angle $d\chi$ résulte nettement de la dernière des équations (14); il est aisé de donner pour $d\psi$ une interprétation géométrique également simple. En effet, l'angle que la trace du plan tangent sur XOY fait avec OX a pour tangente $\frac{\lambda}{\mu}$; l'angle infiniment petit dont tourne cette trace, le plan XOY étant supposé fixe et ne coïncidant avec le plan du cercle qu'à l'origine du déplacement, aura donc pour valeur

$$\frac{\mu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\mu}{\mu^2 + \lambda^2}.$$

Or si, dans cette expression, nous remplaçons λ, μ, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ par leurs valeurs, elle se réduit précisément à $d\psi$; $d\psi$ n'est donc autre chose que l'angle dont a tourné la trace du plan tangent sur le plan fixe avec lequel coïncidait le plan du cercle avant le déplacement.

On peut avoir besoin d'évaluer $d\psi$, $d\chi$ en fonction du déplacement δs et de son inclinaison; il faut pour cela, dans les équations qui les définissent, remplacer dl et $d\varphi$ par leurs valeurs tirées des équations (4); on trouve ainsi

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{\delta s} = -\dfrac{1}{R}\cos i + \left(\dfrac{N}{RH} - \dfrac{p}{H}\cot V\cos\varphi - \dfrac{r}{H}\right)\sin i, \\[2ex] \dfrac{d\chi}{\delta s} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\cos i + \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial V}{\partial l} + p\sin\varphi - \dfrac{N}{R}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\sin i. \end{cases}$$

(¹) La méthode suivie ici, pour trouver les équations relatives aux éléments différentiels du second ordre, est évidemment applicable sans modification à une surface définie par une génératrice de nature quelconque, et les équations trouvées ici conserveraient la même forme dans le cas général; les valeurs particulières de $d\psi$, $d\chi$ caractérisent seules les surfaces spéciales que nous avons en vue.

II.

1. *Torsion géodésique. Lignes de courbure. Ombilics.* — L'angle de torsion géodésique d'un élément ayant pour cosinus directeurs α, β, γ est donné par la formule

$$d\tau_g = \alpha(\mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu) + \beta(\nu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\nu) + \gamma(\lambda\,\delta\mu - \mu\,\delta\lambda).$$

Or on a (11), (14)

$$\begin{aligned}
\mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu &= -\sin V\cos V\cos\varphi\,d\psi + \sin\varphi\,d\chi,\\
\nu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\nu &= -\sin V\cos V\sin\varphi\,d\psi - \cos\varphi\,d\chi,\\
\lambda\,\delta\mu - \mu\,\delta\lambda &= -\sin^2 V\,d\psi.
\end{aligned}$$

D'autre part, les équations (4) donnent

$$\begin{aligned}
\alpha\,ds &= \mathrm{M}\cos\varphi\,dl - (\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi)\sin\varphi,\\
\beta\,ds &= \mathrm{M}\sin\varphi\,dl + (\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi)\cos\varphi,\\
\gamma\,ds &= \mathrm{Q}\,dl
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i,\\
\beta &= \cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i,\\
\gamma &= \sin V\sin i.
\end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'expression de $d\tau_g$; nous aurons

$$\begin{aligned}
d\tau_g = &\quad (\sin\varphi\,d\chi - \sin V\cos V\cos\varphi\,d\psi)(\cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i)\\
&- (\cos\varphi\,d\chi - \sin V\cos V\sin\varphi\,d\psi)(\cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i)\\
&- \sin^3 V\sin i\,d\psi
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$-d\tau_g = \cos i\,d\chi + \sin V\sin i\,d\psi. \tag{16}$$

On en conclut, pour l'équation des lignes de courbure,

$$\cos i\,d\chi + \sin V\sin i\,d\psi = 0. \tag{17}$$

Si l'on veut n'y introduire que l'angle i, on devra y remplacer $d\psi$,

$d\chi$ par leurs valeurs tirées des équations (15), ce qui donne immédiatement

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\cos^2 i + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial l} + \frac{pR\sin\varphi - Q}{RH} - \frac{N}{RH}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\sin i \cos i$$
$$+\left(\frac{NQ}{RH^2} - \frac{pM\cos\varphi}{H^2} - \frac{rQ}{H^2}\right)\sin^2 i = 0$$

ou, en simplifiant,

$$(18) \qquad 2H\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cot 2i = N\frac{\partial V}{\partial \varphi} + w - R\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Les équations des ombilics s'obtiendront en exprimant que les directions principales sont indéterminées, ce qui donne

$$(19) \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad w - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0.$$

2. *Lignes asymptotiques. Courbures principales.* — Si nous conservons les notations du numéro précédent, l'équation des lignes asymptotiques est

$$\alpha\,\delta\lambda + \beta\,\delta\mu + \gamma\,\delta\nu = 0$$

ou, d'après les formules employées dans ce même numéro,

$$(\sin V \sin\varphi\, d\psi + \cos V\cos\varphi\, d\chi)(\cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i)$$
$$+(-\sin V\cos\varphi\, d\psi + \cos V\sin\varphi\, d\chi)(\cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i)$$
$$+\sin i\sin^2 V\, d\chi = 0$$

ou, en simplifiant,

$$(20) \qquad \sin i\, d\chi - \sin V\cos i\, d\psi = 0.$$

Ici, comme pour les lignes de courbure, on ne doit laisser subsister que l'angle i. Pour cela, remplaçons $d\chi$, $d\psi$ par leurs valeurs tirées des relations (15). Nous aurons, toutes réductions faites,

$$(21) \quad Q\cos^2 i + 2H\frac{\partial V}{\partial \varphi}\sin i\cos i + R\left(\frac{\partial V}{\partial l} - \frac{N}{R}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + p\sin\varphi\right)\sin^2 i = 0.$$

Cherchons enfin les courbures principales. Soit C l'une d'elles, nous aurons

$$(22) \qquad C = \frac{\delta\nu}{\delta\alpha},$$

les δ désignant un déplacement effectué le long d'une ligne de courbure; on aura donc

$$\text{(23)} \qquad CQ\,dl = \sin V\,d\chi, \quad CH\,dl = d\chi.$$

Remplaçons dl et $d\chi$ par leurs valeurs en fonction de i; nous aurons

$$\text{(24)} \qquad C\sin i = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\cos i + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial V}{\partial l}p + \sin\varphi - \frac{N}{R}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\sin i.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer i entre cette équation et celle des lignes de courbure (18); on trouve alors, toutes réductions faites,

$$\text{(25)} \qquad \left\{\begin{aligned} &RHC^2 + C\left(N\frac{\partial V}{\partial\varphi} - pR\sin\varphi - R\frac{\partial V}{\partial l} - Q\right)\\ &\qquad + \left[\frac{\partial V}{\partial l}\sin V + \frac{\partial(r\cos V - p\sin V\cos\varphi)}{\partial\varphi}\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

On obtiendra les équations différentielles qui conviennent à une surface minima en observant qu'on doit avoir, *quel que soit* φ,

$$N\frac{\partial V}{\partial\varphi} - pR\sin\varphi - Q - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0;$$

de même les équations différentielles qui déterminent les surfaces cerclées applicables sur une sphère de rayon a s'obtiendront à l'aide de l'identité

$$\frac{\partial V}{\partial l}\sin V + \frac{\partial(r\cos V - p\sin V\cos\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{RH}{a^2}.$$

Il est clair que nous avons, dans tout ce qui précède et pour ainsi dire tacitement, adopté un sens bien déterminé sur la normale en chaque point; il est nécessaire de savoir si ce sens est dirigé du pied de la normale vers le centre de courbure, ou dans le sens opposé. Pour faire cette distinction, il nous suffira de nous placer dans un cas particulier, par exemple celui d'une surface de révolution. Il est clair que celui des deux centres de courbure qui se trouve sur l'axe OZ aura son z positif ou négatif suivant que l'angle V sera obtus ou aigu; ceci posé, les coordonnées de centre de courbure sont, en général, données par les équations

$$\text{(26)} \qquad X = R\cos\varphi \pm \frac{\lambda}{C}, \quad Y = R\sin\varphi \pm \frac{\mu}{C}, \quad Z = \pm\frac{\nu}{C},$$

les signes supérieurs allant ensemble; la dernière donne

$$-Z = \pm \frac{\cos V}{C},$$

V étant supposé aigu, Z devra être négatif.

Or, supposons V aigu et le rayon de courbure compté du pied de la normale vers le centre; alors on doit avoir

$$Z = -\frac{1}{C} \cos V;$$

il faut donc dans ce cas choisir le signe supérieur; au contraire, si l'on convient, et nous adopterons cette convention, de compter le rayon de courbure du centre de courbure vers le pied de la normale positivement, et négativement en sens contraire, nous aurons, pour déterminer les coordonnées du centre de courbure,

$$X = R \cos\varphi - \frac{\lambda}{C}, \quad Y = R \sin\varphi - \frac{\mu}{C}, \quad Z = R \cos\varphi - \frac{\nu}{C}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

I.

1. Nous allons maintenant développer quelques-unes des conséquences des résultats qui précèdent. Soient G une génératrice circulaire, G′ la génératrice infiniment voisine. Les plans de ces deux cercles se coupent suivant une droite AA′, que nous appellerons la *caractéristique*. Son équation est, comme nous l'avons vu,

$$\alpha + py = 0;$$

les deux points A, A′, où elle coupe G, sont donc donnés par l'équation

$$Q = \alpha + pR \sin\varphi = 0.$$

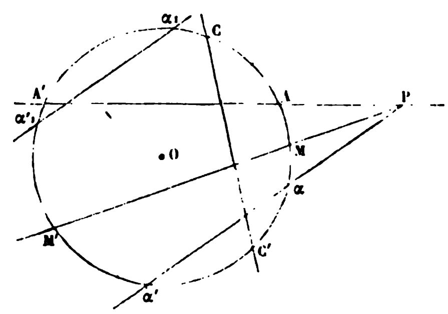
D'autre part, la génératrice G′ projetée sur le plan de G a pour équa-

tion

$$(x - u\,dl)^2 + (y - v\,dl)^2 = (R + dR)^2,$$

et par suite la corde commune à cette projection et au cercle G, que

Fig. 1.



nous appellerons simplement l'*axe radical*, a pour équation

$$ux + vy + RR' = 0;$$

les points α, α', où elle coupe le cercle G, sont donc fournis par l'équation

$$M = R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi = 0.$$

Les deux droites $\alpha\alpha'$, AA' se coupent en un point P ayant pour coordonnées

$$x = \frac{wv - pRR'}{pu}, \quad y = -\frac{w}{p}.$$

La polaire CC' de ce point, par rapport à G, a donc pour équation

$$(wv - pRR')x - uwy = pR^2u,$$

et les deux points C, C' sont donnés par l'équation

$$(wv - pRR')\cos\varphi - uw\sin\varphi = pRu.$$

Or on reconnaît aisément que cette dernière peut s'écrire, en conservant les notations employées jusqu'ici,

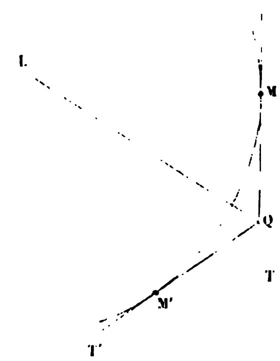
$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

Ceci posé, les points AA′, $\alpha\alpha'$, CC′, P possèdent des propriétés importantes que nous allons exposer.

Démontrons d'abord une propriété fondamentale des points C, C′; cette propriété se déduirait aisément des équations relatives à la courbure; mais, à cause de son importance, nous en donnerons une démonstration directe et géométrique.

Soient

Fig. 2.



M, M′ deux points infiniment voisins de G;
MT, M′T′ les tangentes correspondantes;
QL l'intersection des deux plans tangents à la surface aux mêmes points.

Le trièdre QLTT′ nous donne

$$\cos\widehat{QL} = -\cos\widehat{QT}\cos\widehat{QT'} + \sin\widehat{QT}\sin\widehat{QT'}\cos T'QT$$

ou, en appelant dv l'angle des deux plans tangents et négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$1 - \frac{dv^2}{2} = 1 - \frac{dV^2}{2} - \sin^2 V \frac{d\varphi^2}{2},$$

d'où

$$dv^2 = dV^2 + \sin^2 V\, d\varphi^2.$$

Cette relation donne l'angle de deux normales infiniment voisines dont les pieds sont sur une même génératrice. Si maintenant nous

appelons H l'angle que MT fait avec la tangente conjuguée, on a

$$\frac{\sin\widehat{LQM'}}{\sin\widehat{MT}} = \frac{\sin\widehat{T'QT}}{\sin\widehat{QL}}$$

ou, en passant à la limite,

$$\frac{\sin H}{\sin V} = \frac{d\varphi}{dv};$$

d'où l'on déduit, enfin,

$$\tang H = \sin V \frac{d\varphi}{dV}. \tag{27}$$

D'après cela, la condition $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ équivaut à $H = \frac{\pi}{2}$ et, par suite, les points C, C' de la *fig.* 1 sont ceux où le cercle C est tangent à une ligne de courbure de la surface; nous sommes donc conduits au théorème suivant :

Théorème. — *Il existe sur chaque génératrice deux points où cette génératrice est tangente à une ligne de courbure de la surface et les deux points sont situés sur la polaire du point où l'axe radical rencontre la caractéristique.*

De même, la condition $\sin V = 0$ ou $w + pR \sin\varphi = 0$ équivaut à $H = 0$, les points AA' de la *fig.* 1 sont donc ceux où la génératrice est tangente à une ligne asymptotique, et l'on a ce théorème :

Théorème. — *Il existe sur chaque génératrice deux points où elle est tangente à une ligne asymptotique de la surface, et ces deux points sont situés sur la caractéristique.*

Il est clair que chacun de ces deux théorèmes souffre une exception si la droite CC', dans le premier cas, ou AA' dans le second, est indéterminée; dans le premier cas, il y aurait une infinité de points de courbure ou, en d'autres termes, la surface se raccorderait avec une sphère le long de G, qui serait alors une ligne de courbure. Dans le second cas, la surface toucherait le plan mobile tout le long de la génératrice.

2. *Position relative de deux génératrices infiniment voisines.* — En général, G, G' n'auront aucun point commun; pour qu'il en soit autre-

ment, il faut évidemment que leur point de rencontre soit à la fois sur la caractéristique et sur l'axe radical, en d'autres termes, que P soit sur le cercle; cette condition, qui est d'ailleurs suffisante, s'exprime par la relation

$$(wv - pRR')^2 + u^2(w^2 - p^2R^2) = 0. \tag{28}$$

Lorsqu'elle a lieu, les points C, C' se confondent avec P, et la génératrice est osculatrice en ce point à une ligne de courbure de la surface.

Si l'on veut que les deux génératrices aient deux points communs, il faudra exprimer que les deux droites AA', $\alpha\alpha'$ coïncident, ce qui donne alors

$$u = 0, \quad wv = pRR'. \tag{29}$$

Si ces conditions sont remplies, P est indéterminé et la surface touche une sphère suivant le cercle G qui est une ligne de courbure ([1]).

Il peut enfin arriver que ces droites $\alpha\alpha'$, AA' se confondent avec une même tangente à G; pour qu'il en soit ainsi, on doit ajouter aux conditions précédentes celle qui exprime que la distance $-\frac{w}{p}$ du centre à AA' est égale à $-$R, par exemple, et l'on obtient alors les trois équations

$$u = 0, \quad v = R', \quad w = pR. \tag{30}$$

3. *Distribution des plans tangents le long d'une génératrice.* — Nous avons trouvé, pour l'expression de l'angle V que fait le plan tangent avec le plan du cercle,

$$\tang V = \frac{w + pR\sin\varphi}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi}.$$

Soient γ l'inclinaison du déplacement du centre sur l'axe OZ du

---

([1]) Il peut y avoir exception : si l'une des conditions est donnée *a priori* et que la seconde vienne s'introduire ensuite, les points de courbure resteront déterminés; si l'on se donne, une fois pour toutes, $u = 0$, les deux points en question sont donnés par $\cos\varphi = 0$; si, au contraire, c'est la condition $wv - pRR' = 0$ qui s'introduit d'abord, les deux points de courbure sont donnés par l'équation $\sin\varphi = -\frac{pR}{w} = -\frac{v}{R'}$.

cercle, ω l'inclinaison de ce même déplacement sur le rayon qui vient aboutir au point de contact; supposons de plus que la variable indépendante l soit l'arc de trajectoire du centre, et désignons par $d\tau$ l'angle infiniment petit des plans de deux génératrices voisines : l'équation précédente pourra s'écrire

$$\operatorname{tang} V = \frac{dl \cos\gamma + R\, d\tau \sin\varphi}{dR + dl \cos\omega}.$$

Sous cette forme, l'analogie entre les surfaces réglées et celles que nous étudions est mise en évidence; elle est surtout complète lorsque $dl = 0$ ou lorsque $\cos\gamma = 1$; en effet, dans ces deux cas, l'angle ω disparaît de l'équation, qui devient

$$\text{soit } \operatorname{tang} V = \frac{R\, d\tau \sin\varphi}{dR}, \quad \text{soit } \operatorname{tang} V = \frac{dl + R\, d\tau \sin\varphi}{dR},$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque, pour une génératrice particulière, le centre est stationnaire ou se déplace normalement au plan de cette génératrice, la tangente de l'angle que fait le plan tangent avec le plan du cercle varie, le long de ce cercle, proportionnellement au sinus de l'arc compris entre un point fixe et le point de contact.*

Revenons au cas général; appelons *points conjugués du cercle* deux points M, M' en ligne droite avec le point P; l'équation de la corde MM' étant mise sous la forme

$$\lambda M = Q,$$

on aura, en chacun des deux points M, M',

$$\operatorname{tang} V = \lambda;$$

en d'autres termes, les deux plans tangents en M et M' iront couper l'axe des z au même point; la droite d'intersection de ces deux plans rencontre d'ailleurs toujours la polaire CC' de P; et il est évident qu'elle détermine, sur ces deux droites CC', Oz, quand on fait varier λ, deux divisions homographiques; elle engendre, par conséquent, un hyperboloïde à une nappe, ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *Les plans tangents en deux points conjugués se coupent sur une droite qui rencontre dans toutes ces positions l'axe du cercle et la*

ligne qui joint les points de courbure; elle détermine sur ces deux droites deux divisions homographiques et, par suite, décrit un hyperboloïde à une nappe.

On obtient aisément l'équation de cet hyperboloïde; c'est

$$(uy - vx)(wx - uz) + pRx(R'x + Ru) = 0. \tag{31}$$

L'hyperboloïde se réduira à deux plans si CC′ passe au centre, c'est-à-dire si P est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si $u = 0$; l'hyperboloïde se réduit alors à deux plans confondus avec YOZ.

Le cas où P est indéterminé échappe évidemment aux raisonnements qui précèdent, le rapport $\frac{M}{Q}$ étant alors invariable. Dans ce cas, tous les plans tangents coupent OZ au même point; la sphère qui se raccorde avec la surface le long du cercle G a son centre sur OZ; les coordonnées de ce point sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = R\cot V = \frac{RR'}{w} = \frac{v}{p}.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

Il y a un second cas où le cercle considéré est une ligne d'ombre, c'est celui où $p = 0$, c'est-à-dire où le plan du cercle se déplace parallèlement à lui-même.

4. *Lieu des normales.* — La normale au point $l\varphi$ a pour équations

$$\frac{x - R\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y - R\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{-z(w + pR\sin\varphi)}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi}.$$

Le point où la normale rencontre OZ a pour ordonnée $-R\cot V$; il est clair que ce point est le même pour deux points conjugués du cercle. De plus, la manière dont la position de ce point varie quand on décrit le cercle dépend uniquement de la disposition relative des quatre points A, A′, α, α' (*fig.* 1); en A, A′, la normale rencontre OZ à l'infini; en α, α', au contraire, la normale est couchée dans le plan du cercle. Si P est extérieur au cercle, l'inclinaison de cette normale atteint un maximum ou un minimum aux deux points C, C′, qui sont alors réels; si P est intérieur, ces valeurs limites de l'angle V n'existent plus. Il me paraît inutile d'insister davantage sur cette discussion. Si,

ligne des centres, et, en définitive, cette courbe se trouve déterminée par cinq points.

Dans le cas général, la construction de chaque normale sera la suivante : Ayant construit la conique auxiliaire, pour avoir la normale en un point M, on fera passer un plan par ce point et l'axe du cercle. Ce plan coupera la conique en deux points, dont l'un situé sur OZ; on joindra l'autre au point M, et l'on aura la normale cherchée.

5. Cherchons dans quel cas la conique sera un cercle. La surface

$$R'(x^2+y^2-R^2)+Rz(w+py)=0$$

admet comme plans cycliques les deux plans

$$z=0, \quad w+py-\frac{R'}{R}z=0.$$

Pour que le plan de la conique soit parallèle au plan du cercle, il faut qu'on ait

$$u=0, \quad v=0.$$

Pour qu'il soit parallèle au plan $py-\frac{R'}{R}z=0$, il faut que

$$u=0, \quad \frac{w}{R'}=-\frac{v}{pR}. \tag{33}$$

Dans le premier cas, le déplacement du centre est normal au plan de la génératrice; le cercle mobile et le cercle conjugué sont situés dans des plans parallèles.

Dans le second cas, le déplacement du centre est perpendiculaire à la caractéristique; de plus, on a $pRw+vR'=0$, et la génératrice circulaire a son plan perpendiculaire à celui du cercle conjugué.

Cherchons encore dans quel cas la conique auxiliaire se réduit à un système de droites.

Supposons d'abord $R'=0$, on aura deux droites situées dans les deux plans

$$z=0, \quad w+py=0.$$

La première est à rejeter comme ne pouvant servir à la construction des normales; la seconde se projette suivant la caractéristique. La surface

Remarque. — Il est important d'observer que la fonction r ne joue aucun rôle dans la théorie précédente, on pourra donc, dans toutes les questions qui s'y rattachent, admettre sans inconvénient que $z = 0$, c'est-à-dire que le plan du cercle mobile roule sur un cylindre.

6. *Classification des surfaces cerclées.* — Les considérations qui précèdent conduisent à une classification rationnelle des surfaces cerclées, fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins; on est ainsi conduit à les séparer en quatre classes principales.

1^{re} CLASSE. — Deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun; les normales, le long d'une même génératrice, rencontrent une conique fixe; chaque génératrice est tangente en deux points distincts à une ligne de courbure de la surface.

2^e CLASSE. — Chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice voisine : les points communs forment sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent. Les normales le long d'un même cercle rencontrent, outre l'axe de ce cercle, une droite fixe; enfin, chaque génératrice est osculatrice en un point à une ligne de courbure de la surface.

3^e CLASSE : *Enveloppes de sphères* [1]. — Deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs; le cercle mobile reste constamment tangent à deux directrices curvilignes; les normales correspondant aux points d'une même génératrice forment un cône de révolution, et chaque génératrice est une ligne de courbure de la surface.

4^e CLASSE. — Pour les surfaces de cette classe, les deux directrices curvilignes dont nous venons de parler se confondent, et le cercle mobile reste constamment osculateur à une ligne à double courbure.

Les caractères analytiques sont : pour la deuxième classe,

$$u^2(w^2 - p^2R^2) + (wv - pRR')^2 = 0; \tag{28}$$

(1) Il est clair que le mot *enveloppe* ne s'applique ici qu'à une sphère variable dépendant d'un *seul* paramètre arbitraire; de plus, nous entendons ici que l'enveloppe est engendrée par la caractéristique de la sphère mobile, et non par telle autre génération circulaire dont elle peut être susceptible.

pour la troisième classe,

$$u = 0, \quad wv = pRR' \quad (^1); \tag{29}$$

pour la quatrième classe,

$$u = 0, \quad v = R', \quad w = pR. \tag{30}$$

Il est aisé de vérifier que, pour ces dernières surfaces, le point où la caractéristique touche l'arête de rebroussement appartient bien à la génératrice. En effet, nous avons trouvé (I^re Partie) pour les coordonnées de ce point

$$z = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad x = -\frac{v}{r} + \frac{pw' - wp'}{p^2 r}.$$

Si l'on y remplace w par pR, v par R', on obtient immédiatement $x = 0$, $y = -R$.

7. *Remarque.* — Pour compléter la classification précédente, il est nécessaire de chercher à quel caractère on pourra reconnaître que trois cercles infiniment voisins sont sur une même sphère.

Observons pour cela que le centre de la sphère enveloppée, dans le cas général des surfaces de troisième classe, a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{v}{p}.$$

Si l'on applique à ce point les formules (1), on obtient

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \left[w + \left(\frac{v}{p}\right)'\right] dl :$$

il suffit d'exprimer que ce point est immobile et les caractères analytiques cherchés sont alors

$$u = 0, \quad wv = pRR', \quad w + \left(\frac{v}{p}\right)' = 0; \tag{31}$$

---

(1) Il faut tenir compte de la restriction indiquée dans la note de la page 136. Les conditions (29) peuvent être remplies sans que la surface soit enveloppe de sphère. Il suffit de supposer qu'elles s'introduisent successivement; la surface serait alors un cas limite d'une surface plus générale, pour laquelle une seule des deux conditions serait satisfaite.

on arriverait au même résultat en exprimant, d'après les équations (19), que tous les points de la génératrice sont des ombilics.

8. *Formules particulières aux enveloppes de sphères.* — Dans le cas des enveloppes de sphères, les fonctions qui figurent dans la théorie générale ne sont pas toujours les plus simples; il peut être utile d'introduire celles qui se rattachent à la courbe *déférente* ou lieu des centres des sphères enveloppées. Le passage d'un groupe de fonctions à l'autre ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Les coordonnées du centre C de l'enveloppée sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{v}{p} = \frac{\mathrm{RR}'}{w},$$

leurs variations

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \left[w + \left(\frac{v}{p}\right)'\right] dl\,;$$

la tangente à la déférente est donc dirigée suivant OZ, et l'arc ds de cette courbe est lié à notre variable l par l'équation

$$\frac{ds}{di} = w + \left(\frac{v}{p}\right)'.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à la déférente étant 0, 0, 1, si nous leur appliquons les équations (2), nous aurons pour leurs variations

$$0, \quad -p\,dl, \quad 0\,:$$

la normale principale est donc parallèle à notre axe des y, et, si l'on appelle h la courbure de la déférente, on aura

$$h = -p\,\frac{dl}{ds}.$$

Enfin on vérifierait de même que la binormale de la déférente est parallèle à OX et que sa torsion k est donnée par l'équation

$$k = r\,\frac{dl}{ds}.$$

Observons de plus que, le rayon ρ de la sphère enveloppée étant égal

à $\sqrt{R^2+\frac{v^2}{p^2}}$, on aura

$$\rho\rho' = RR' + \frac{v}{p}\left(\frac{v}{p}\right)' = \frac{v}{p}\left[w + \left(\frac{v}{p}\right)'\right].$$

Il est aisé de donner maintenant le Tableau complet des formules de transformation. Prenons $dl = ds$, d'où $w + \left(\frac{v}{p}\right)' = 1$; nous aurons

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{l} R = \sqrt{\rho^2 - \rho^2\rho'^2}, \quad p = -h, \quad r = +k, \\ v = -h\rho\rho', \quad w = 1 - \rho'^2 - \rho\rho'', \quad u = 0; \end{array}\right.$$

les cinq fonctions générales sont bien exprimées en fonction des éléments de la déférente et du rayon ρ de l'enveloppée. Observons enfin que l'on a

$$(33)\qquad \tang V = \frac{w}{R'} = \frac{pR}{v} = \frac{\sqrt{1-\rho'^2}}{\rho'}.$$

9. *Théorème de M. Ribaucour.* — Il est visible que les relations précédentes contiennent la théorie spéciale de nos enveloppes de sphères. En faisant la substitution dans les équations générales de la première Partie, la plupart de ces équations se simplifieraient notablement; nous nous contenterons de démontrer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour, et qui exprime une des propriétés les plus remarquables de ces surfaces particulières.

THÉORÈME. — *Lorsqu'on se déplace sur la caractéristique d'une enveloppe de sphères, le centre de courbure correspondant à la ligne de courbure non circulaire décrit une conique, située dans un plan perpendiculaire au plan osculateur de la déférente.*

Les coordonnées du centre de courbure sont, d'après les équations (26),

$$x = R\cos\varphi - \frac{\sin V\cos\varphi}{C}, \quad y = R\sin\varphi - \frac{\sin V\sin\varphi}{C}, \quad z = \frac{\cos V}{C},$$

C étant la courbure principale correspondante.

Dans le cas des enveloppes de sphères, l'une des courbures est

$\frac{w}{RR'}\cos V$; or le produit des courbures (25) se réduit pour $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ à

$$\frac{\sin V}{RH}\left(\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi\right);$$

la seconde courbure a donc pour expression

$$\frac{1}{H}\left(\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi\right);$$

les coordonnées du centre de courbure correspondant sont alors

$$x = \left(R - \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\right)\cos\varphi,$$

$$y = \left(R - \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\right)\sin\varphi,$$

$$z = \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\cot V.$$

En éliminant φ, on obtient les équations du lieu des centres de courbure, savoir

$$x^2 + y^2 = (R - z\,\mathrm{tang}\,V)^2,$$

$$py + w - z\,\mathrm{tang}\,V\frac{dV}{dl} = 0;$$

la première représente le cône des normales, la seconde un plan, ce qui démontre le théorème.

Observons que le plan de la conique passe par l'intersection des plans de deux cercles infiniment voisins et qu'il est perpendiculaire au plan osculateur de la déférente.

Pour que cette conique soit un cercle, il faut que le plan qui la contient soit perpendiculaire à OZ, ce qui exige $p = 0$; en d'autres termes, cela n'a lieu que dans les surfaces de révolution.

Elle se réduira à deux droites si le plan passe à l'origine, c'est-à-dire si $w = 0$; d'ailleurs, comme on a, dans le cas des enveloppes de sphères,

$$wv = pRR',$$

Les coordonnées du pôle P sont (p. 133) :

$$x = \frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0.$$

Ce point appartenant, d'une part à la caractéristique, d'autre part au plan radical des sphères décrites sur deux génératrices infiniment voisines comme grands cercles, sera le centre d'une sphère coupant orthogonalement toutes les sphères bitangentes qui contiennent l'une ou l'autre de ces deux génératrices.

S'il arrive que le point P soit stationnaire, il sera, d'après cela, le centre d'une sphère orthogonale à trois séries consécutives de sphères bitangentes; enfin, s'il est fixe dans l'espace, la surface sera une anallagmatique à déférente réglée et P sera le centre de la sphère directrice.

On peut s'en assurer sans difficulté par le calcul et donner en même temps les caractères analytiques auxquels on reconnaîtra que P est stationnaire : si nous appliquons aux coordonnées précédentes les formules générales de déplacement, les conditions cherchées seront

$$\frac{\delta x}{\delta l} = 0, \quad \frac{\delta y}{dl} = 0, \quad \frac{\delta z}{dl} = 0,$$

ce qui donne ici

$$u + \left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)' + \frac{rw}{p} = 0,$$

$$v - \left(\frac{w}{p}\right)' + r\,\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu} = 0,$$

la condition $\delta z = 0$ étant évidemment satisfaite d'elle-même. Si nous éliminons r entre ces deux relations, il vient

$$-\mathrm{RR}' + \frac{w}{p}\left(\frac{w}{p}\right)' + \frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)' = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\left(\frac{w}{p}\right)^2 + \left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)^2 = \mathrm{R}^2 + k^2,$$

k étant une constante arbitraire. Cette relation, qui peut s'écrire

$$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \mathrm{R}^2 + k^2,$$

montre que le point P est le centre d'une sphère qui coupe orthogonalement toutes les sphères bitangentes à la surface et ayant leurs centres sur la surface des axes; le théorème est donc démontré; le rayon de la sphère directrice est d'ailleurs égal à k.

Cyclide osculatrice. — Les résultats précédents mettent en évidence l'utilité qu'il peut y avoir à introduire, dans l'étude des surfaces cerclées, les cyclides comme auxiliaires. Une génératrice circulaire étant donnée, si l'on prend pour sphère directrice la sphère de centre P et qui contient les deux foyers correspondants, pour déférente l'hyperboloïde osculateur à la surface réglée engendrée par l'axe, ces deux éléments définissent une cyclide qui pourra être sans inconvénient substituée à la surface elle-même tant qu'il s'agira de propriétés concernant deux génératrices consécutives (1). Si, pour une génératrice particulière, le point P est stationnaire, la même cyclide fournira toutes les propriétés qui dépendent de trois cercles infiniment voisins.

Enfin, d'après ce qui précède, on voit qu'une surface anallagmatique ne peut admettre de génératrices circulaires que si la surface déférente est réglée. Ce théorème est dû à M. Laguerre.

II.

1. *Trajectoires orthogonales des génératrices.* — L'équation des trajectoires orthogonales des génératrices est

$$\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi = (r\mathrm{R} + v\cos\varphi - u\sin\varphi)\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi = 0.$$

Le cercle étant supposé en mouvement, un point M mobile sur ce cercle aura un mouvement angulaire relatif égal à $r\,dl + d\varphi$, ce mouvement étant évalué à partir d'une droite liée invariablement au plan XOY. Posons $r\,dl = d\sigma$; soit α l'angle de la tangente au cercle avec la ligne des centres, on a

$$\mathrm{R}\,d\sigma + dl\cos\alpha = 0.$$

Donc :

Théorème. — *Pour qu'un point mobile sur le cercle décrive une tra-*

(1) On pourra même, dans ce cas, prendre pour déférente n'importe quel hyperboloïde tangent à la surface des axes le long de OZ.

jectoire orthogonale des génératrices, il faut et il suffit que sa vitesse relative, projetée sur la tangente, soit constamment égale et de signe contraire à la vitesse du centre, projetée sur cette même droite.

Observons que la fonction p ne figure pas dans l'équation précédente; il résulte de là que le cas général se ramène immédiatement au cas où tous les cercles seraient situés dans un seul et même plan; en d'autres termes, le relation entre l et φ ne sera nullement altérée si l'on étend sur un plan la surface enveloppée par le plan du cercle.

Il faut seulement supposer alors que chaque plan tangent, en se rabattant, entraîne avec lui le cercle correspondant et que, de plus, l'angle φ est évalué à partir d'une direction donnée par la tangente à la ligne suivant laquelle se transforme l'arête de rebroussement.

L'équation des trajectoires se ramène immédiatement à une équation de Riccati. Si l'on pose, en effet,

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha = \varphi + \int r\,dl = \varphi + \sigma, \quad A = \frac{v\cos\sigma + u\sin\sigma}{R}, \\ &B = \frac{v\sin\sigma - u\cos\sigma}{R}, \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \lambda, \end{aligned}\right.$$

elle devient

$$2\frac{d\lambda}{dl} = A\lambda^2 - 2B\lambda - A.$$

On déduit de là deux conséquences importantes :

1° La détermination des trajectoires orthogonales sera complètement obtenue si l'on connait une seule de ces trajectoires;

2° D'après un théorème bien connu, le rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati est constant; ici ce rapport sera indépendant de l; d'autre part, $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ ou λ est le coefficient angulaire de la corde qui joint le point mobile M à un point fixe sur le cercle; on est donc conduit à ce théorème :

Théorème. — *Quatre trajectoires orthogonales coupent deux génératrices quelconques suivant deux systèmes de points ayant le même rapport anharmonique.*

Nous entendons par rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence celui des quatre droites qui les joignent à un point arbitraire de cette circonférence.

Si l'une ou l'autre des quantités A, B est nulle, l'intégration est immédiatement ramenée à une quadrature. On reconnaît aisément que dans ce cas la ligne des centres se transforme en une droite lorsqu'on planifie la surface enveloppée par le plan du cercle.

2. *Points centraux.* — En suivant jusqu'au bout l'analogie avec les surfaces réglées, on est conduit à appeler *point central* un point où la génératrice est à une distance maxima ou minima de la génératrice infiniment voisine.

Ces points sont évidemment caractérisés par ce fait que la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale y est égale à zéro. Ils sont donc déterminés par l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

ou

$$(R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi)(v\cos\varphi - u\sin\varphi) + pR\cos\varphi(w + pR\sin\varphi) = 0.$$

On les obtiendra en coupant le cercle par l'hyperbole équilatère

$$(RR' + ux + vy)(vx - uy) + pR^2x(w + py) = 0.$$

Il existe donc sur chaque génératrice quatre points centraux; ils sont, avec le centre, sur une même hyperbole équilatère; d'où l'on conclut que deux d'entre eux, au moins, sont toujours réels. Ils déterminent sur la surface quatre courbes analogues à la ligne de striction d'une surface réglée; mais qui, d'ailleurs, ne paraissent présenter aucune propriété simple.

TROISIÈME PARTIE.

Nous nous proposons maintenant de déterminer une surface cerclée, d'après une propriété générale imposée à ses génératrices.

I.

1. Problème. — *Trouver les surfaces qui admettent comme lignes géodésiques les trajectoires orthogonales d'une série de génératrices circulaires.*

Les points où la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale est nulle sont, comme nous l'avons vu, sur l'hyperbole équilatère

$$(RR' + ux + vy)(vx - uy) + pR^2x(w + py) = 0.$$

Nous aurons les équations du problème en écrivant que cette courbe est indéterminée, ce qui donne

$$uv = 0, \quad v^2 - u^2 + p^2R^2 = 0, \quad R'v + pRw = 0, \quad R'u = 0.$$

1° Si nous supposons $R' \neq 0$, u doit être nul, et la seconde équation exige $v = 0$, $p = 0$; cette solution donne évidemment les surfaces de révolution;

2° $R' = 0$, $u \neq 0$, $v = 0$. — Il faut alors que $pRw = 0$: or p ne peut être nul en même temps que v, si $u \neq 0$; donc $w = 0$.

Dans ce cas, prenons, pour variable indépendante l, l'arc de la ligne des centres; nous aurons

$$u = 1,$$

et la solution sera donnée par les équations

$$R = a, \quad u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = \frac{1}{a},$$

a étant une constante arbitraire.

Interprétons ces relations; si nous nous reportons aux équations qui donnent le point où la caractéristique touche son enveloppe, elles deviennent, dans le cas actuel,

$$x = y = z = 0;$$

donc le centre de la génératrice est sur l'arête de rebroussement; le rayon de torsion de cette arête est d'ailleurs $\frac{1}{p}$ ou a, il est constant, enfin le rayon du cercle est constant et égal au rayon de torsion, et son plan est osculateur à la trajectoire du centre.

En résumé :

Le centre du cercle décrit une courbe à torsion constante; son plan est osculateur à cette courbe, et son rayon est constant et égal au rayon de torsion de la ligne des centres.

Ces surfaces sont, avec les surfaces de révolution, les seules qui répondent à la question.

$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, on aura, pour l'angle de torsion $d\tau$,

$$d\tau^2 = \left(d\frac{\cos t}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2 + \left(d\frac{\sin t}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2 + \left(d\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2$$

ou

$$d\tau^2 = \frac{1+\mu^2+\mu'^2}{(1+\mu^2)^2}\,dt^2.$$

On en conclut, pour la torsion,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{f'(t)}{1+\mu^2}.$$

Supposons maintenant qu'on se donne pour $\frac{d\tau}{ds}$ une fonction déterminée de t, savoir $\frac{d\tau}{ds} = \varphi(t)$; laissant la fonction f absolument arbitraire, on aura d'abord

$$\mu = \sqrt{\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} - 1};$$

puis, en intégrant l'équation (α),

$$H = -\cos t \int (\mu + \mu'') f(t) \sin t\, dt + \sin t \int (\mu + \mu'') f(t) \cos t\, dt;$$

en portant ces valeurs dans les équations (β), on aura les équations de la courbe; on voit qu'il y subsiste une fonction arbitraire.

3. Revenons aux surfaces précédentes; si l'on substitue à u, v, w, p, r, R les valeurs trouvées, on obtient

$$M = \cos\varphi, \quad N = ra - \sin\varphi, \quad Q = \sin\varphi, \quad H = 1, \quad V = \varphi,$$

a étant une constante et notre variable t étant maintenant l'arc de la trajectoire du centre.

La dernière relation $V = \varphi$ exprime une propriété remarquable de ces surfaces, propriété qui, d'ailleurs, les caractérise complètement. Si l'on cherche, en effet, à déterminer nos fonctions de manière à avoir, quel que soit φ,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{w + pR\sin\varphi}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi},$$

on obtient immédiatement

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad pR = 1, \quad R' = 0.$$

Toutes les équations relatives à ces surfaces prennent une forme particulièrement simple; celle des lignes de courbure, par exemple, devient

$$2 \cot 2i = ra - \sin\varphi.$$

Mais ce sont surtout les trajections orthogonales qui présentent de l'intérêt. Leur équation est ici

$$a\,d\varphi = (\sin\varphi - ar)\,dl.$$

Soient

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la binormale et de la normale principale pour une trajectoire orthogonale donnée; soit enfin δs l'élément de cette trajectoire; nous aurons, pour un déplacement effectué le long de cette ligne,

$$\begin{aligned} \delta x &= \mathrm{M} \cos\varphi\,dl = \cos^2\varphi\,dl, \\ \delta y &= \mathrm{M} \sin\varphi\,dl = \sin\varphi\cos\varphi\,dl, \\ \delta z &= \mathrm{Q}\,dl \qquad\quad = \sin\varphi\,dl; \end{aligned}$$

d'où

$$\delta s = dl, \quad \alpha = \cos^2\varphi, \quad \beta = \sin\varphi\cos\varphi, \quad \gamma = \sin\varphi.$$

Donc :

1° *L'arc intercepté par deux génératrices circulaires sur une même trajectoire orthogonale est égal à l'arc correspondant de la ligne des centres.*

D'autre part, la binormale, étant située dans le plan tangent à la surface, d'après la définition même des lignes géodésiques, sera la tangente à la génératrice circulaire, et nous aurons

$$\alpha' = -\sin\varphi, \quad \beta' = \cos\varphi, \quad \gamma' = 0;$$

on en déduira aisément

$$\alpha'' = -\sin\varphi\cos\varphi, \quad \beta'' = -\sin^2\varphi, \quad \gamma'' = \cos\varphi.$$

Soit alors $\frac{1}{\mathrm{T}}$ la torsion; d'après une des formules de M. Serret, nous

aurons

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\gamma''}\frac{\delta\gamma'}{\delta s} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\gamma' + p\beta'\,dl}{dl} = p = \frac{1}{a};$$

de là cette nouvelle propriété, qui a été démontrée par M. Lie :

2° *Chaque trajectoire orthogonale est à torsion constante; cette torsion ne varie pas d'une trajectoire à une autre; elle est égale à la torsion de la ligne des centres.*

On a une loi assez simple pour la première courbure; si on la désigne par $\frac{1}{\rho}$, on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma''}\frac{\delta\gamma}{\delta s} = \frac{d\gamma + p\beta\,dl}{dl}\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dl} + \frac{1}{a}\sin\varphi$$

et, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation des trajectoires,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sin\varphi}{a} - r.$$

4. Nous dirons un dernier mot relatif aux lignes isothermes: l'équation $ds = 0$ est ici

$$i\,dl + a\,d\varphi + (ra - \sin\varphi)\,dl = 0.$$

Elle se ramène à une équation de Riccati; les lignes isothermes de la surface seront donc connues, quand on connaîtra une solution de cette équation. A ce point de vue, les surfaces particulières que nous venons d'obtenir font partie d'une classe importante de surfaces dont nous allons nous occuper.

II.

1. Problème. — *Trouver toutes les surfaces cerclées telles que la fonction* H *soit une fonction rationnelle de* $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Supposons qu'on ait

$$M^2 + Q^2 = P^2,$$

P étant une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, qui sera évidemment linéaire; soit

$$P = a\cos\varphi + b\sin\varphi + c,$$

on aura, pour tous les points du cercle générateur

$$(RR' + ux + vy)^2 + (wR + \varpi y)^2 = (ax + by + cR)^2,$$

en posant $pR = \varpi$.

Cette équation devant être celle du cercle, on en conclut que les deux droites AA', $\alpha\alpha'$ de la *fig.* 1 doivent être conjuguées par rapport au cercle.

Écrivons que la droite

$$RR' + ux + vy + i(wR + \varpi y) = 0$$

est tangente au cercle, nous aurons

$$(R' + iw)^2 = u^2 + (v + i\varpi)^2;$$

cette relation devant avoir lieu quand on y change i en $-i$, nous aurons les deux relations

$$R'^2 + \varpi^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$wR' = v\varpi.$$

Ce sont les conditions cherchées.

Le raisonnement précédent détermine, d'ailleurs, la fonction P; ce ne peut être que la polaire cc' du point P de la figure; c'est, à un facteur près,

$$(\varpi R' - wv)\cos\varphi + wu\sin\varphi + \varpi u = M\frac{\partial Q}{\partial\varphi} - Q\frac{\partial M}{\partial\varphi}.$$

Le raisonnement précédent suppose distinctes les deux droites AA', $\alpha\alpha'$; si cela n'avait pas lieu, on serait, comme nous l'avons vu, dans le cas des enveloppes de sphères, qui d'ailleurs répondent *évidemment* à la question; nous verrons dans les questions suivantes que la plupart des surfaces que nous aurons à déterminer rentreront dans l'une ou l'autre de ces deux classes.

Nous aurons besoin, dans la suite, d'une propriété remarquable des surfaces en question; elle consiste en ce que le numérateur

$$M\frac{\partial Q}{\partial t} - Q\frac{\partial M}{\partial t}$$

de $\frac{\partial V}{\partial l}$ est toujours divisible par P; nous allons démontrer ce théorème.

2. Observons que le centre ne peut jamais être fixe dans le cas actuel, car la première des conditions trouvées donnerait alors

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varpi = 0, \quad R' = 0,$$

ce qui ne peut évidemment avoir lieu que dans le cas du plan; dès lors nous prendrons pour variable l l'arc indéfini de la ligne des centres et les conditions trouvées deviendront

$$\begin{gathered} u^2 + v^2 + w^2 = 1, \\ \varpi^2 + R'^2 = 1, \\ v\varpi = wR'; \end{gathered}$$

deux des quatre fonctions qui figurent ici sont arbitraires, et ces conditions seront identiquement satisfaites en posant

$$\varpi = \sin\alpha, \quad R' = \cos\alpha, \quad u = \cos\beta, \quad v = \sin\beta\cos\alpha, \quad w = \sin\beta\sin\alpha;$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\alpha, \\ Q &= \sin\alpha(\sin\beta + \sin\varphi) = \sin\alpha(\sin\beta + \sin\varphi), \\ N &= \rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi; \end{aligned}$$

on vérifie aisément qu'on a

$$H = P = \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi + 1.$$

Ceci posé, si l'on cherche à vérifier l'identité

$$\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) = P(A\cos\varphi + B\sin\varphi + C),$$

on a, pour déterminer A, B, C, les cinq équations

$$\begin{aligned} &B\sin\beta - A\cos\alpha\cos\beta = \alpha'\sin\beta - \beta'\sin\alpha\cos\beta, \\ &A\sin\beta + B\cos\alpha\cos\beta = \alpha'\cos\beta\cos\alpha + \beta'\sin\alpha\sin\beta, \\ &A\cos\alpha\cos\beta + C = \alpha'\sin\beta + \beta'\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta, \\ &A + C\cos\alpha\cos\beta = \alpha'\sin\beta\cos\beta\cos\alpha + \beta'\sin\alpha, \\ &B + C\sin\beta = \alpha'(1 + \sin^2\beta). \end{aligned}$$

Or on tire des trois premières

$$B = \alpha', \quad C = \alpha' \sin\beta, \quad A = \beta' \sin\alpha,$$

et il est aisé de s'assurer que ces mêmes valeurs de A, B, C vérifient les deux dernières; le théorème est donc démontré.

En résumé, dans le cas où H sera rationnel, et en laissant de côté les enveloppes de sphère, nous aurons à remplacer u, v, w, ϖ, R par deux fonctions seulement, les substitutions à opérer étant celles que j'indique dans le Tableau suivant :

$$(\mathrm{T}) \left\{ \begin{array}{l} \varpi = \sin\alpha, \quad R' = \cos\alpha, \quad u = \cos\beta, \quad v = \sin\beta\cos\alpha, \quad w = \sin\beta\sin\alpha \\ \qquad\qquad\qquad (\varpi = pR, \ \rho = rR), \\ M = \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\alpha, \\ Q = \sin\alpha(\sin\alpha + \sin\varphi), \\ H = P = \cos\beta\cos\alpha\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1, \\ S = \beta'\sin\alpha\cos\varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha'\sin\beta, \\ N = \rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{P}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial l} = \dfrac{S}{P}. \end{array} \right.$$

Remarque. — Lorsque $\sin\alpha = 0$, on en déduit $w = 0$, $\varpi = 0$ et, la caractéristique étant indéterminée, la surface se réduit à un plan. Si l'on a $\cos\beta = 0$, on obtient une surface de quatrième classe, engendrée par le cercle osculateur d'une ligne à double courbure, c'est-à-dire un cas particulier des enveloppes de sphères.

3. Sur les surfaces précédentes, comme sur les enveloppes de sphères, les lignes de longueur nulle, dont la détermination entraîne, comme on sait, celle des lignes isométriques, sont déterminées évidemment par une équation linéaire en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, réductible à une équation de Riccati.

Les points $P = 0$ ne sont pas des ombilics; l'équation des lignes de courbure pourrait, dans le cas actuel, être tout entière divisée par le facteur P. Il est important d'établir qu'en ces deux points l'une des courbures principales devient infinie; la surface n'admet, d'ailleurs, aucun ombilic isolé.

Les équations des ombilics sont, en effet,

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad w - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0,$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel,

$$P = 0, \quad w - \frac{RS}{P} = 0.$$

Ces équations ne donnent évidemment aucun ombilic, à moins que les deux fonctions S et P, linéaires toutes deux en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, ne soient proportionnelles, auquel cas il y aurait sur la surface de certaines génératrices particulières dont tous les points seraient des ombilics, comme cela a lieu pour les enveloppes de sphères; mais il n'y aura jamais d'ombilics isolés.

4. Nous rattacherons aux surfaces précédentes celles pour lesquelles la quantité H^2 est linéaire en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$uv = 0, \quad u^2 = v^2 + \varpi^2.$$

En nous bornant toujours aux surfaces réelles, nous aurons les deux conditions

$$v = 0, \quad u = \varpi.$$

Elles expriment que le centre du cercle coïncide avec le point central de l'axe, et que son rayon est égal à l'inverse du paramètre de distribution des plans tangents à la surface des axes le long de cette génératrice particulière.

Nous appellerons *surfaces à focale isotrope* celles qui, sans être enveloppes de sphères, donnent pour H une fonction linéaire de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Pour justifier cette dénomination, j'observe que le déplacement d'un foyer

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = R\sqrt{-1}$$

est donné par les formules

$$\delta x = u\,dl, \quad \delta y = v\,dl - \varpi\sqrt{-1}\,dl, \quad \delta z = w\,dl + R'\sqrt{-1}\,dl,$$

La déférente est alors une surface réglée astreinte à couper une sphère fixe suivant une ligne de longueur nulle; on peut obtenir aisément l'équation finie de toutes les surfaces réglées de cette nature. Je reviendrai plus loin sur ces résultats (Problème V).

III.

Problème. — *Trouver les surfaces cerclées telles que la somme des courbures principales soit constante le long de chaque génératrice, et variable d'une génératrice à la suivante.*

1. La somme des courbures principales Σ est donnée par l'équation

$$RH^2\Sigma = (2\varpi\sin\varphi + \varpi')H^2 + R\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) - N\left(M\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - Q\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right).$$

Si Σ est constamment égal à o, on ne peut rien affirmer sur la forme de la fonction H. J'étudierai tout à l'heure ce cas particulier. En général, Σ étant une fonction donnée de l, l'équation précédente montre que H doit être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; c'est donc parmi les surfaces à focale isotrope que nous devons chercher la solution, en laissant d'abord de côté les enveloppes de sphères.

Si l'on fait alors la substitution indiquée dans le Tableau (T), on trouve

$$\Sigma = \frac{\sin\alpha(2\sin\varphi + \sin\beta)P + RS - N\sin\alpha\cos\beta}{RP^2}$$

ou

$$\begin{aligned}R\Sigma(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)^2 \\ = \sin\alpha(2\sin\varphi + \sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1) \\ + R(\beta'\sin\alpha\cos\varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha'\sin\beta) \\ - \sin\alpha\cos\beta(\rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi).\end{aligned}$$

Cette équation est du second degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, c'est-à-dire de la forme

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + 2D\cos\varphi + 2E\sin\varphi + F = 0;$$

comme elle doit avoir lieu quel que soit φ, on doit avoir

$$A + F = 0,\quad A - C = 0,\quad B = D = E = 0;$$

ces cinq relations deviennent ici, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
&R\Sigma(1+\cos^2\alpha\cos^2\beta) = \sin\alpha\sin\beta + R\alpha'\sin\beta - \rho\sin\alpha\cos\beta,\\
&R\Sigma(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta,\\
&(R\Sigma\sin\beta - \sin\alpha)\cos\alpha\cos\beta = 0,\\
&2R\Sigma\cos\alpha\cos\beta = R\beta'\sin\alpha,\\
&2R\Sigma\sin\beta = 3\sin\alpha + R\alpha'.
\end{aligned}$$

Telles sont les cinq équations de condition qui donnent lieu à une discussion facile :

1° $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est à rejeter, car on a alors

$$2\Sigma R\sin\beta = 3, \quad \Sigma R\sin\beta = 2,$$

qui sont incompatibles;

2° De même $\beta = \frac{\pi}{2}$ conduirait aux trois équations

$$R\Sigma = \sin\alpha + R\alpha' = 2\sin\alpha = \tfrac{3}{2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}R\alpha',$$

qui sont encore incompatibles;

3° Reste la solution

$$R\Sigma\sin\beta = \sin\alpha.$$

Or, on voit aisément que $\sin\beta$ ne peut être nul; si alors on multiplie la seconde de nos équations de condition par $\sin\beta$, elle devient

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta = -2\sin^2\beta,$$

résultat évidemment absurde, si l'on se limite aux valeurs réelles de α, β.

On conclut de là qu'il n'existe parmi les surfaces à focale isotrope aucune surface réelle répondant à la question; et, comme H doit néanmoins être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, il ne peut plus y avoir que des enveloppes de sphères.

Cela posé, sur une telle surface, une des courbures principales reste invariable le long de la génératrice; donc, si la somme des courbures reste constante ou, plus généralement, s'il existe entre ces deux éléments une relation fixe donnée, les deux courbures principales seront l'une et l'autre invariables. En pareil cas, il est clair que la conique de

M. O. Bonnet devra se réduire à un cercle; la surface sera donc de révolution. Faisons, dans l'équation précédente,

$$\varpi = 0, \quad \rho = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1,$$

ce qui revient à prendre, pour variable l, la distance du plan du cercle à un plan parallèle fixe; il vient

$$1 + R\frac{dV}{dl} = \frac{RR'\Sigma}{\cos V}.$$

Mais

$$\tang V = \frac{dl}{dR}:$$

on aura donc

$$R \sin V = \int \Sigma R \, dR;$$

d'où

$$\frac{dl}{dR} = \frac{\int \Sigma R \, dR}{\sqrt{R^2 - \left(\int \Sigma R \, dR\right)^2}},$$

équation qui définit le méridien de la surface.

2. Étudions maintenant le cas où Σ est constant et égal à 0 dans toute l'étendue de la surface; en d'autres termes, cherchons les surfaces minima à génératrices circulaires.

Si nous considérons d'abord le cas des enveloppes de sphères, nous aurons la solution en faisant $\Sigma = 0$ dans le résultat obtenu plus haut, ce qui donne, en appelant C une constante,

$$\frac{dl}{dR} = \frac{C}{\sqrt{R^2 - C^2}}:$$

c'est l'équation d'une chaînette.

Revenons au cas général des surfaces minima; la relation donnée peut s'écrire

$$N\left(M\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - Q\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) - R\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) - (Q + \varpi \sin\varphi)(M^2 + Q^2) = 0.$$

Comme elle doit avoir lieu pour toute valeur de φ, les termes qui contiennent en facteur une puissance impaire de $\cos\varphi$, divisés par

$\cos\varphi$, donneront une fonction entière de $\sin\varphi$ qui devra être identiquement nulle; les termes qui ne dépendent que de $\sin\varphi$ et $\cos^2\varphi$ donneront une seconde identité; or, parmi ces derniers, le terme du degré le plus élevé en $\sin\varphi$, c'est-à-dire le terme en $\sin^3\varphi$, a pour coefficient $-\varpi(u^2+v^2+\varpi^2)$.

En nous limitant aux surfaces réelles, il ne peut être nul que si $\varpi=0$, ce qui entraîne $\rho=0$.

L'identité devient alors

$$\begin{aligned}
&w(v\cos\varphi - u\sin\varphi)^2\\
&\quad + R[(uw' - wu')\cos\varphi + (vw' - wv')\sin\varphi + R'w' - wR'']\\
&\qquad\qquad + w(u\cos\varphi + v\sin\varphi + R')^2 + w^3 = 0,
\end{aligned}$$

Si l'on écrit qu'elle a lieu pour toutes les valeurs de φ, on obtient cinq conditions dont deux sont identiquement satisfaites et dont les trois autres sont

$$\begin{aligned}
-wv^2 - wu^2 + RwR'' - RR'w' - wR'^2 - w^3 &= 0,\\
Ruw' - Rwu' + 2wuR' &= 0,\\
Rvw' - Rwv' + 2wvR' &= 0.
\end{aligned}$$

Les deux dernières s'intègrent immédiatement et donnent

$$wR^2 = a^2u,\quad wR^2 = b^2v,$$

a, b étant des constantes arbitraires. On en conclut $\frac{v}{u}=$ const., c'est-à-dire que le lieu du centre est une courbe plane; notre axe OX étant actuellement indéterminé, prenons-le dans le plan de la courbe des centres; nous aurons

$$v=0,$$

et la première de nos équations se réduira à

$$-wu^2 + RwR'' - RR'w' - wR'^2 - w^3 = 0.$$

Prenons R pour variable indépendante; elle devient

$$w^3\frac{R^4}{a^4} + Rw' + w + w^3 = 0.$$

Considérant w^2 comme une fonction de R^2, elle s'intègre immédia-

tement, et, en désignant par c une constante arbitraire, on trouve

$$v = \frac{a^2 c}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}, \quad u = \frac{c R^2}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}.$$

En résumé :

Le plan du cercle se déplace parallèlement à lui-même; le centre décrit une courbe plane, et si l'on prend l'axe des x parallèle au plan du cercle, l'axe des y perpendiculaire, les équations du lieu des centres sont

$$dz = \frac{c a^2\, dR}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}, \quad dx = \frac{c R^2\, dR}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}.$$

On retrouve ainsi la surface minima de Riemann.

3. La méthode précédente s'applique, pour ainsi dire sans modification, à toutes les questions analogues. Si la condition imposée ne met pas en évidence que H doit être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, on cherche s'il ne serait pas nécessaire que H^2 fût du premier degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Il en est ainsi, par exemple, lorsqu'on exige que le produit des courbures principales ne change que d'une génératrice à l'autre. En laissant de côté les surfaces de révolution, qui sont évidemment dans ce cas, on est conduit à faire $v = 0$, $u = \varpi$ dans l'équation de condition. On est ainsi conduit à reconnaître que nulle surface de cette nature ne répond à la question.

Pour les surfaces de révolution, en appelant a^2 le produit des rayons de courbure principaux, on a

$$\frac{dV}{dl} \sin V = \frac{RH}{a^2}$$

ou

$$2 \frac{dV}{dl} \sin V \cos V = \frac{2 RR'}{a^2} \quad (H \cos V = R');$$

on sera ramené à intégrer cette équation pour avoir le méridien.

Considérons, par exemple, le cas où a est constant, c'est-à-dire celui des surfaces applicables sur la sphère; si z est l'ordonnée d'un parallèle de rayon R, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{dz}{dR}.$$

L'équation précédente devient

$$a^2\,dz = d\mathrm{R}\left(\sqrt{4\mathrm{R}^4 + a^4} - 2\mathrm{R}^2\right).$$

On retrouve la surface de révolution bien connue, applicable sur la sphère.

On démontrerait de même que les seules surfaces pour lesquelles une des courbures principales reste invariable le long de chaque génératrice sont les enveloppes de sphères. Il est inutile d'insister sur ces calculs dont la marche est toujours la même et qui, d'ailleurs, ne donnent ici aucun résultat intéressant.

IV.

Problème. — *Déterminer les surfaces cerclées telles que l'inclinaison d'une ligne asymptotique sur la génératrice soit la même pour tous les points de celle-ci, cette inclinaison pouvant, d'ailleurs, varier d'une génératrice à une autre.*

1. L'équation (21) des lignes asymptotiques est

$$\left(\mathrm{R}\,\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{N}\,\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\varphi} + \varpi\sin\varphi\right)\sin^2 i + 2\mathrm{H}\,\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\varphi}\sin i\cos i + \mathrm{Q}\cos^2 i = 0.$$

On voit que H doit encore ici être une fonction rationnelle de $\cos\varphi$, $\sin\varphi$; en laissant de côté les surfaces étudiées dans le § II, on ne peut avoir que des enveloppes de sphères, et, comme ici l'inclinaison i détermine le rapport des courbures, les surfaces cherchées sont de révolution. Si nous faisons dans l'équation précédente

$$u = v = 0, \quad \varpi = \rho = 0,$$

elle devient

$$\mathrm{R}\,\frac{d\mathrm{V}}{dl}\sin^2 i + w\cos^2 i = 0.$$

Or

$$w = \mathrm{R}'\,\mathrm{tang}\,\mathrm{V},$$

donc

$$\mathrm{R}\,d\mathrm{V}\sin^2 i + d\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{V}\cos^2 i = 0.$$

Soit z la distance d'un plan du cercle à un plan parallèle fixe, on a

$$dR \tang V = dz.$$

On en déduit, sans difficulté,

$$z = \int \frac{e^{-\int \frac{dR}{R \tang^2 i}}}{\sqrt{1 - e^{-2\int \frac{dR}{R \tang^2 i}}}} dR,$$

pour l'équation du méridien.

2. Il reste à examiner le cas des surfaces déterminées dans le problème II. Faisons la substitution indiquée dans le Tableau (T). En posant

$$\tang i = A,$$

l'identité précédente devient

$$\begin{aligned}
&A^2 R(\beta' \sin\alpha \cos\varphi + \alpha' \sin\varphi + \alpha' \sin\beta) \\
&\quad - A^2 \sin\alpha \cos\beta(\rho + \sin\beta \cos\alpha \cos\varphi - \cos\beta \sin\varphi) \\
&\quad + (2A \sin\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)(\cos\alpha \cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi + 1) \\
&\qquad + (A^2 + 1) \sin\alpha \sin\varphi (\cos\alpha \cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi + 1) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Cette identité est du second degré. Le terme en $\sin\varphi \cos\varphi$ devant être nul, on a d'abord

$$(A^2 + 1) \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta = 0,$$

d'où l'on déduit, en remarquant que $\sin\alpha = 0$ donne un plan, et $\cos\beta = 0$ des enveloppes de sphères,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Le terme en $\cos\varphi$ devient alors

$$A^2 R \beta',$$

et, comme il doit être nul, β est constant; l'équation ne contient plus, ces deux conditions étant supposées satisfaites, aucun terme en $\cos\varphi$. Les termes en $\sin\varphi$ et $\sin^2\varphi$ doivent alors être nuls, ce qui donne

$$(A^2 + 1) \sin\beta = 0, \quad (A^2 + 1) \sin^2\beta + \sin\beta = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta = 0.$$

Le terme en $\sin\varphi$ et le terme constant sont alors

$$(2A^2+1)\sin\varphi, \quad -A^2\rho+2A.$$

Il est impossible de les annuler ensemble dans le cas de surfaces réelles, puisque ρ serait imaginaire.

On en conclut que les surfaces de révolution déterminées plus haut sont les seules qui répondent à la question [1].

V.

Problème. — *Trouver les surfaces telles que l'inclinaison des lignes de courbure sur une génératrice circulaire soit invariable tout le long de cette génératrice.*

1. Soit i l'inclinaison donnée; si l'on pose $\frac{A}{2}=\cot 2i$, on devra avoir, pour toute valeur de φ (18),

$$AH\frac{\partial V}{\partial\varphi}+R\frac{\partial V}{\partial l}-w-N\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0.$$

Les surfaces enveloppes de sphères répondent évidemment à la question si A est constamment égal à o. Si A n'est pas nul, la surface doit être une des surfaces à focale isotrope étudiées dans le problème II, car H doit être une fonction rationnelle de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Faisons alors la substitution indiquée dans le Tableau (T); nous aurons

$$\begin{aligned}(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)&(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi+\sin\beta\sin\varphi+1)\\&+R(\beta'\sin\alpha\cos\varphi+\alpha'\sin\varphi+\alpha'\sin\beta)\\&-\sin\alpha\cos\beta(\rho+\sin\beta\cos\alpha\cos\varphi-\cos\beta\sin\varphi)\equiv 0.\end{aligned}$$

Cette relation, linéaire par rapport à $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, donne les trois équations de conditions suivantes :

$$\begin{aligned}&(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cos\alpha\cos\beta+R\beta'\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=0,\\&(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\beta+R\alpha'+\sin\alpha\cos^2\beta=0,\\&(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+R\alpha'\sin\beta-\rho\sin\alpha\cos\beta=0.\end{aligned}$$

[1] Nous avons laissé de côté l'hypothèse $A^2+1=0$; on s'assure aisément, en la transportant dans l'identité à vérifier, qu'elle entraîne $\sin\alpha\cos\beta=0$.

Éliminons A pour avoir les conditions qui se rapportent à la nature même de la surface, nous obtenons

$$R\alpha' \cos\beta + \sin\alpha\cos\beta + \rho\sin\alpha\sin\beta = 0, \quad R\beta' + \rho\cos\alpha = 0.$$

Ces deux relations sont précisément les équations (A) de la page 161; elles expriment que le pôle est fixe et, par suite, que la surface est une anallagmatique.

Comme d'ailleurs la focale est isotrope et qu'elle coïncide avec l'intersection de la sphère directrice et de la déférente, cette focale doit se réduire à des génératrices de la sphère en question; ces conditions sont d'ailleurs suffisantes et l'on est conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Les seules surfaces dont chaque génératrice circulaire coupe à angle constant toutes les lignes de courbure sont les surfaces anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant un système de droites isotropes.*

Le nombre des génératrices composant l'intersection de la directrice de la déférente ne saurait être égal à 3; du moins, dans ce cas, la déférente étant réglée et admettant trois directrices rectilignes serait déterminée et coïnciderait avec la sphère directrice; les sphères bitangentes orthogonales seraient toutes de rayon nul et leur enveloppe se réduirait à la directrice même.

Si l'intersection se compose de deux génératrices de la sphère, elles sont nécessairement du même système; sinon elles se rencontreraient et, la déférente se réduisant à un plan, l'enveloppe serait une droite.

On devra donc prendre pour intersection deux génératrices du même système D, D' de la sphère. Une droite s'appuyant sur D, D' et astreinte à rencontrer une courbe fixe et d'ailleurs arbitraire c engendrera la déférente.

2. Le problème est résolu dans le cas général et la solution dépend, comme on le voit, d'une fonction arbitraire; la nature de la courbe c, lorsqu'on assujettira la surface à une condition restrictive quelconque, se déterminera par une intégration qui, en général, ne présentera pas de difficulté.

Supposons qu'on veuille, par exemple, que l'inclinaison i, déjà constante le long de chaque génératrice, soit invariable sur toute l'étendue de la surface; on obtiendra immédiatement une nouvelle intégrale. Pour le faire voir, reprenons la question du commencement; les trois équations de condition peuvent, comme on le voit aisément, être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\beta' \sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{R} = 0,$$

$$\frac{\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\beta'(A \sin\beta \cos\beta + \cos^2\beta - \sin^2\beta)}{(A \cos\beta - 2\sin\beta)\cos\beta} = 0,$$

$$\rho = (A\cos\beta - 2\sin\beta)\cos\beta.$$

La première s'intègre dans tous les cas $(R' = \cos\alpha)$ et donne

$$R \sin\alpha \cos\beta = a,$$

a étant une constante arbitraire; elle donne, sous une autre forme, la solution générale déjà obtenue.

La seconde s'intègre dans le cas où $A =$ const., et l'intégrale

$$n \cos\beta (A\cos\beta - 2\sin\beta) \sin^2\alpha = m,$$

où m, n sont deux nombres arbitraires, complète alors la solution.

L'interprétation géométrique de cette nouvelle intégrale ne paraît donner aucun résultat intéressant; observons, cependant, qu'on peut en déduire une relation équivalente très simple, savoir

$$\varpi^2 \rho = \frac{m}{n}.$$

En outre, on peut obtenir le rayon en fonction de l'arc l de la trajectoire du centre par une nouvelle intégration; en effet, si l'on observe que $\cos\alpha = R'$ et qu'on élimine β entre les deux intégrales déjà obtenues, il vient

$$4n^2a^2R^2R'^2 = -m^2R^4 + 2na^2(mA + 2n^2)R^2 - n^2a^4(A^2 + 4).$$

On voit que R^2 s'exprime à l'aide de fonctions simplement périodiques portant sur la variable l. Dès lors toutes les fonctions inconnues dont la question dépend se trouvent complètement déterminées.

3. Particularisons autrement la question : sans rien préjuger sur la fonction A, supposons qu'on veuille que R soit constant.

On aura alors

$$R' = \cos\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

l'équation $R\beta' + \rho\cos\alpha = 0$ donnera

$$\beta = \text{const.}$$

Mais alors les deux dernières équations de condition (p. 169) montrent que ρ et A sont tous deux constants. La surface obtenue ici est donc tout à fait particulière et rentre dans celles du numéro précédent.

La solution est, en somme, donnée par les équations

$$\cos\beta = \frac{a}{R}, \quad u = \cos\beta, \quad v = 0, \quad w = \sin\beta, \quad p = \frac{1}{R}, \quad r = -\frac{1}{R}\cot\beta,$$

$$A = \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}, \quad \tang 2i = \sin 2\beta.$$

Interprétons ce résultat.

Le point P a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p} = -R\sin\beta, \quad z = 0;$$

le plan du cercle enveloppe un cône de sommet P et le centre s'obtient en menant une perpendiculaire dans chaque plan tangent à ce cône, par le sommet P, à la génératrice correspondante, cette perpendiculaire étant égale à $R\sin\beta$.

D'autre part, le rapport $\frac{r}{p}$ mesure la tangente du demi-angle au sommet du cône osculateur à celui qu'enveloppe le plan mobile. Ce rapport étant ici constant, le cône en question est de révolution et son demi-angle au sommet θ est donné par la relation

$$\tang\theta = -\cot\beta.$$

On en conclut que la droite PO décrit un plan perpendiculaire à l'axe du cône enveloppé par le plan du cercle; sa longueur est constamment égale à $R\sin\beta$, l'axe du cercle fait avec celui du cône un

Je ne traiterai pas le problème dans le cas général et me contenterai de faire la remarque suivante : l'équation précédente n'est qu'en apparence du troisième degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et se réduit, dès qu'on effectue le calcul, à la forme

$$A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi + D\sin\varphi + E\cos\varphi + F = 0;$$

elle donne donc, en écrivant qu'elle a lieu pour toute valeur de φ, cinq équations seulement entre les fonctions inconnues qui sont ici au nombre de six; la solution doit donc être beaucoup moins restreinte qu'elle ne le paraît au premier abord.

Je me bornerai à résoudre le problème dans deux cas : les enveloppes de sphères et les surfaces à focale isotrope.

2. Dans le cas des enveloppes de sphères, le facteur d'intégrabilité doit être de la forme $\frac{A}{M}$, et l'on doit avoir

$$A\left(N\frac{\partial M}{\partial \varphi} - M\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right) + (RA)'.M - AR\frac{\partial M}{\partial l} = 0$$

ou

$$A(\rho\nu\cos\varphi + R'\nu\sin\varphi + \nu^2) + (RA)'(\nu\sin\varphi + R') - AR(R'' + \nu'\sin\varphi) = 0;$$

d'où l'on déduit les trois équations de condition suivante :

$$A\rho\nu = 0,\quad AR'\nu + RA'\nu - AR\nu' = 0,\quad A\nu^2 - ARR'' + R'(AA)' = 0.$$

A ne pouvant être nul, nous aurons

$$\nu = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = 0.$$

Si l'on avait $\nu = 0$, on en conclurait $R' = 0$ ou $p = 0$, à cause de la relation $w\nu = pRR'$; enfin, si $R' = 0$, on doit supposer $p = 0$.

On retrouve ainsi les surfaces de révolution et les surfaces canaux.

Supposons maintenant $\rho = 0$; la seconde équation peut s'écrire

$$2\frac{R'}{R} + \frac{A'}{A} - \frac{\nu'}{\nu} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\nu = aAR^2,$$

a étant une constante. Portons cette valeur dans la troisième équation, elle devient

$$A^2 a^2 R^4 - ARR'' + RR'A' + R'^2 A = 0.$$

Pour l'intégrer, posons

$$A = f\frac{R'}{R};$$

nous aurons

$$a^2 f^3 R'^2 R + f' R' = 0.$$

Il faut rejeter la solution $R' = 0$ qui donnerait

$$A^2 a^2 R^4 = 0.$$

Nous avons donc, en intégrant,

$$\frac{1}{f^2} = a^2 R^2 - b^4,$$

b étant une nouvelle constante.

Le problème est donc résolu par les équations suivantes :

$$\rho = 0, \quad A = \frac{R'}{R}\frac{1}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}, \quad v = \frac{aRR'}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}, \quad u = 0, \quad wv = pRR'.$$

Interprétons cette solution :

$\rho = 0$ indique que le plan du cercle générateur enveloppe un cylindre. Cherchons-en la section droite : le point où OY rencontre la caractéristique a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0.$$

On a

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta y = v\,dl - \left(\frac{w}{p}\right)' dl.$$

Or ici

$$\frac{w}{p} = \frac{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}{a}, \quad \left(\frac{w}{p}\right)' = \frac{aRR'}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}} = v,$$

donc $\delta y = 0$; donc enfin le plan du cercle tourne autour d'une droite fixe L.

Il en résulte que le centre de la sphère enveloppée décrit une courbe

située dans un plan perpendiculaire à L. Comme la solution laisse subsister une fonction arbitraire, cette courbe déférente pourra être choisie d'une manière quelconque.

Le centre C de l'enveloppée a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{v}{p}.$$

Soit K le point où L rencontre le plan décrit par ce point C; ses coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0;$$

on en conclut

$$\overline{KC}^2 = \frac{v^2 + w^2}{p^2}.$$

Mais le rayon $\mathcal{R}$ de l'enveloppée est lié à R par l'équation

$$\mathcal{R}^2 = R^2 + \frac{v^2}{p^2}.$$

On aura donc

$$\overline{KC}^2 = \mathcal{R}^2 - R^2 + \frac{w^2}{p^2} = \mathcal{R}^2 - R^2 + \left(\frac{RR'}{v}\right)^2 = \mathcal{R}^2 - R^2 + \frac{a^2R^2 - b^4}{a^2} = \mathcal{R}^2 - \frac{b^4}{a^2};$$

donc l'enveloppée coupe orthogonalement une sphère fixe, et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *En laissant de côté les surfaces de révolution et les surfaces canaux, les seules enveloppes de sphères qui soient divisées en carrés par leurs lignes de courbure sont définies par les deux conditions suivantes :*

1° *Le centre de l'enveloppée parcourt une ligne plane;*

2° *Cette enveloppée coupe orthogonalement une sphère fixe ayant son centre dans le plan de la courbe des centres.*

Remarque. — Il est bon d'observer que les lignes de courbure s'obtiennent immédiatement; si l'on intègre l'équation

$$R\,d\varphi + v\cos\varphi\,dl = 0,$$

on a

$$\int \frac{v}{R}\,dl + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

ou

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \int \frac{a\,dR}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}} = 0.$$

On peut, d'ailleurs, remarquer que $\frac{1}{R\cos\varphi}$ est un facteur d'intégrabilité et que, par suite, l'équation des trajectoires peut aussi s'écrire

$$\frac{A}{M} R\cos\varphi = \text{const.}$$

Ces deux intégrales sont évidemment identiques.

2. *Surfaces à focale isotrope.* — Reprenons l'équation générale

$$A\left(N\frac{\partial M}{\partial \varphi} - H\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right) = (RA)'\frac{\partial H}{\partial l} - H(RA)'.$$

Si nous y faisons la substitution indiquée dans le Tableau (T), elle devient

$$\begin{aligned}
&-A(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)(\sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi)\\
&\quad - A(\rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi)(\sin\beta\cos\varphi - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi)\\
&\quad - (RA)'(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)\\
&\qquad\qquad + RA[\beta'\cos\beta\sin\varphi + (\cos\alpha\cos\beta)'\sin\varphi] = 0,
\end{aligned}$$

l'accent indiquant toujours une dérivée prise par rapport à l.

Cette relation est de la forme

$$a\cos^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi + d\cos\varphi + e\sin\varphi + f = 0,$$

et, pour qu'elle se réduise à une identité, il faut qu'on ait

$$b = 0, \quad d = 0, \quad c = 0, \quad a + c = 0, \quad a - f = 0;$$

la première équation a lieu d'elle-même, ainsi que la quatrième. Il

reste donc seulement trois conditions, savoir :

$$(RA)' + A\cos\alpha = 0,$$
$$-A\sin\beta\cos\alpha + A\rho\cos\alpha\cos\beta = (RA)'\sin\beta - RA\beta'\cos\beta,$$
$$-A\cos\beta - A\rho\sin\beta = (RA)'\cos\alpha\cos\beta - (RA)(\cos\alpha\cos\beta)'.$$

Si l'on remplace, dans les deux dernières, $(RA)'$ par $-A\cos\alpha$, elles deviennent, toutes réductions faites et supprimant la solution $\sin\alpha = 0$ qui donnerait un plan (¹),

$$\rho\cos\alpha + R\beta' = 0,$$
$$\rho\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\sin\alpha + R\alpha'\cos\beta = 0.$$

Ces relations sont précisément celles qui définissent les surfaces anallagmatiques à focale isotrope. Donc :

Théorème. — *Les seules surfaces cerclées à focale isotrope qui soient décomposées en carrés par les génératrices circulaires et leurs trajectoires orthogonales sont les anallagmatiques dont la déférente et la directrice se coupent suivant une ligne de distance nulle.*

Remarquons enfin que le facteur d'intégrabilité $\frac{A}{P}$ est immédiatement obtenu, car la première équation de condition donne immédiatement

$$A = \frac{m}{R^2},$$

m étant une constante arbitraire; la fonction

$$\frac{m}{PR^2}(N\,dl + R\,d\varphi)$$

sera donc une différentielle exacte.

3. Les surfaces qui répondent aux deux dernières questions sont anallagmatiques; la déférente est réglée et coupe la sphère directrice suivant une ligne de longueur nulle. Il est nécessaire de donner, sous

---

(¹) Notre méthode s'applique sans modification à l'étude des systèmes de cercles situés dans un plan. Ici on retrouverait aisément la solution connue de ce problème : *Diviser un plan en carrés par une série de cercles et leurs trajectoires orthogonales.*

forme finie, l'équation générale des surfaces réglées qui coupent une sphère suivant une pareille ligne.

La surface réglée devant être réelle, la sphère sera imaginaire; sinon, toute droite réelle, astreinte à glisser sur une génératrice de cette sphère, glisserait également sur la génératrice conjuguée; la déférente serait alors, ou un plan, ce qui réduirait l'enveloppe des sphères à une droite, ou un cône. Mais ce dernier cas ne peut se présenter; la focale, en effet, ne peut se réduire à un point, car les coordonnées du foyer satisfont à l'équation

$$\delta x = dl \cos\beta,$$

et $\cos\beta$ ne peut être nul pour aucune des surfaces considérées.

Soit donc

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$$

l'équation de la sphère directrice. Choisissons sur cette sphère la génératrice

$$x + iy = 0, \quad z = ai.$$

Pour qu'une droite *réelle*

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

rencontre constamment cette génératrice, on doit avoir

$$p = an, \quad q = -am.$$

Les équations de la droite mobile seront donc de la forme

$$x = mz + an, \quad y = nz - am,$$

et l'équation générale des surfaces réglées cherchées sera, dès lors,

$$\varphi(zx - ay, zy + ax, a^2 + z^2) = 0,$$

φ étant une fonction homogène quelconque, à trois variables.

On obtient ainsi, sous forme finie, les intégrales des problèmes proposés; cherchons les cyclides qui répondent à la question; si l'on choisit pour φ une forme linéaire, la déférente est un paraboloïde.

On peut aussi prendre pour φ une forme quadratique particulière, savoir

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}[(xz - ay)^2 + (yz + ax)^2]\\&\quad + 2[\mathrm{B}(xz - ay) + \mathrm{C}(yz + ax)](z^2 + a^2) + \mathrm{D}(z^2 + a^2)^2 = 0.\end{aligned}$$

En effet, $z^2 + a^2$ apparait alors en facteur et, en le supprimant, il reste un hyperboloïde à une nappe. Si B et C sont nuls, la surface est un tore. Sinon la directrice touche la déférente en deux de ses ombilics et l'enveloppe est une cyclide de Dupin.

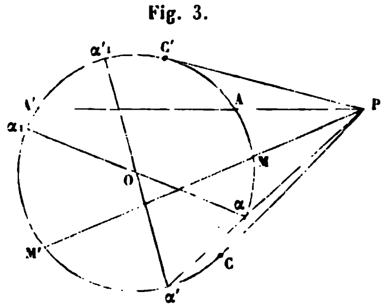
NOTE.

Quelques-uns des résultats établis analytiquement dans la seconde Partie de ce travail sont susceptibles d'une démonstration géométrique que nous croyons devoir indiquer rapidement.

Sphères bitangentes. — Soient G, G′ deux génératrices circulaires situées dans des plans Q, Q′ et S une sphère quelconque passant par G; cette sphère coupera G′ en deux points M_1, M'_1 et la corde $M_1M'_1$ coupera la droite d'intersection de Q et Q′ en un point P_1 qui sera d'égale puissance par rapport aux deux cercles considérés. Ce point restera fixe quand on fera varier le rayon de S; c'est le *centre radical* de G et G′.

La sphère S étant supposée fixe, supposons que G′ se rapproche indéfiniment de G; M_1, M'_1 tendront vers des points déterminés M, M′ de G, et P_1 vers un point P situé sur la caractéristique du plan Q; la corde MM′ ira passer par le point P (*fig.* 3). Donc chaque point pris sur l'axe OZ

Fig. 3.



du cercle G est le centre d'une sphère tangente à la surface cerclée en deux points de G; toutes les cordes de contact sont concourantes: toutes les sphères de deux séries consécutives coupent orthogonalement une sphère fixe ayant P pour centre; d'ailleurs, à une sécante MM′, correspond une sphère bitangente, et une seule, et réci-

proquement; M, M' forment ce que nous avons appelé *un couple de points conjugués* ([1]). En ces deux points les plans tangents font des angles égaux avec le plan Q et, par suite, coupent l'axe OZ au même point; leur droite d'intersection trace deux divisions homographiques sur OZ et sur la polaire CC' de P; elle décrit donc un hyperboloïde.

Points remarquables. — Si la sphère bitangente se réduit à un plan, la corde MM' devient la caractéristique AA' du plan Q; en A, A' les normales à la surface sont parallèles à OZ, et le cercle G est tangent à une ligne asymptotique de la surface.

Si S admet G comme grand cercle, la corde $M_1M'_1$, qui est toujours, dans l'espace, perpendiculaire à la droite menée du centre de S au centre de C', aura pour limite la perpendiculaire menée de P à la tangente de la ligne des centres O, projetée sur le plan Q; cette droite est celle que nous avons appelée *axe radical;* les points α, α' qu'elle détermine sont ceux où la normale à la surface est tout entière dans le plan Q.

Cherchons les points où la génératrice G touche une ligne de courbure; de part et d'autre d'un tel point, il doit s'en trouver deux *infiniment voisins*, tels que la corde qui les joint soit perpendiculaire à la droite d'intersection des plans tangents correspondants; mais alors ces deux plans tangents sont également inclinés sur le plan Q : les deux points dont nous parlons sont donc conjugués; *les points de courbure sont donc les points de contact des tangentes issues de* P.

Surface des normales. — Cherchons enfin la surface Σ, lieu des normales aux différents points de G. La trace de cette surface sur le plan Q se compose du cercle G et des deux diamètres $O\alpha$, $O\alpha'$; cela donne en tout un lieu du quatrième ordre, et, comme chaque point de ce lieu, sauf α_1, α'_1, est certainement un point simple de Σ, celle-ci est une surface du quatrième ordre; cela résultera d'ailleurs de ce qui suit.

Cherchons les points doubles de Σ; de chacun d'eux partent deux normales ayant leurs pieds sur G; comme toute normale doit rencontrer OZ, la ligne double se scinde en deux : d'une part, l'axe OZ qui correspond aux couples de points conjugués; d'autre part, le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales ayant leurs pieds diamétralement opposés.

([1]) Il est entendu que nous laissons de côté le cas des enveloppes de sphères.

Or ce dernier lieu a, sur OZ, un point bien déterminé correspondant au cas où les pieds des normales sont à la fois conjugués et diamétralement opposés et, par suite, appartiennent au diamètre PO. Soit H ce point; si nous menons par OZ un plan quelconque, il coupera le lieu cherché en un point unique distinct de H; donc ce lieu est une conique; elle coupe l'axe OZ en H et la génératrice G aux deux points α_1, α'_1. Son plan est ainsi déterminé; il rencontre les parallèles à OZ, menées par A, A' en deux points qui achèvent de définir la conique.

Cette courbe, l'axe du cercle et le cercle lui-même constituent les trois directrices de la surface cherchée.

Ce qui précède met en évidence une série de coniques appartenant à la surface des normales; en effet, le plan mené par le centre d'une sphère bitangente et la corde des contacts correspondante coupe la surface suivant une courbe du quatrième ordre composée des deux normales et d'une conique.

Toutes les coniques ainsi obtenues s'appuient en deux points sur la conique double et rencontrent constamment les deux droites $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$. Leurs plans enveloppent un cône ayant pour sommet P et pour équation, dans notre système de notations,

$$(ux + vy + wz + RR')^2 = 4RR'(w + py)z.$$

ERRATA.

Page 145, ligne 11, et page 147, ligne 10, *au lieu de* Ribaucour, *lisez* O. Bonnet.

Page 150, ligne 4 en remontant, mettre après le mot anharmonique un renvoi (1) et la note suivante :

(1) Ce théorème a été donné par M. Ribaucour pour le cas particulier des enveloppes de sphères.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M. MARKOFF,

PRIVAT-DOCENT A L'UNIVERSITÉ DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Permettez-moi de m'adresser à vous comme au Secrétaire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, à l'occasion du Mémoire de M. T.-J. Stieltjes : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*, publié dans ce Journal (n° 12, année 1884). M. T.-J. Stieltjes, dans le n° 5 de son Mémoire, établit quelques inégalités que j'ai déjà démontrées dans le Mémoire *Sur certaines inégalités de M. Tchebychef* (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 172-180).

J'ai attribué ces inégalités à M. Tchebychef et j'ai signalé son Mémoire *Sur les valeurs limites des intégrales* (*Journal de Liouville*, année 1874).

La démonstration de M. T.-J. Stieltjes et la mienne sont identiques. Cependant M. T.-J. Stieltjes n'a fait aucune mention de moi ni même de M. Tchebychef.

J'ajoute encore que, dans mon Mémoire *Sur certaines applications des fractions continues*, publié en russe, ces inégalités sont considérablement généralisées.

NOTE A L'OCCASION DE LA RÉCLAMATION DE M. MARKOFF,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

En réponse à la réclamation de M. Markoff, je dois déclarer que c'est seulement par lui que j'ai appris l'existence de l'article de M. Tchebychef *Sur les valeurs limites des intégrales* (*Journal de Liouville*, 1874),

où se trouve déjà l'énoncé des inégalités en question. Je regrette bien de n'avoir pas connu plus tôt ce travail.

Du reste, mes recherches ont été tout à fait indépendantes de celles de MM. Tchebychef et Markoff; en effet, mon travail a été remis à la Rédaction des *Annales de l'École Normale* vers le milieu du mois de mai 1884, et je viens d'apprendre que la livraison des *Mathematische Annalen* contenant l'article de M. Markoff n'est arrivée ici à la bibliothèque de l'Université que dans la seconde moitié de septembre 1884.

Naturellement, je reconnais volontiers que M. Markoff a, le premier, publié une démonstration des inégalités de M. Tchebychef.

Je veux profiter de cette occasion pour ajouter une remarque nouvelle au sujet traité dans mon Mémoire.

La démonstration des inégalités de M. Tchebychef en forme bien une partie essentielle; mais, pour le but que je me suis proposé, il n'est pas moins essentiel de démontrer que les A_k convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Ce point important, je l'ai démontré d'une manière indirecte et en m'appuyant sur le développement d'une fonction arbitraire par la série de Fourier. Il semble pourtant très désirable d'établir cela d'une manière plus simple et plus directe, mais mes efforts dans cette direction n'ont pas conduit au but désiré.

On peut voir, dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences et qui se trouve dans les *Comptes rendus* du 22 septembre 1884, que la question à laquelle je touche ici a une liaison intime avec la convergence d'une certaine fraction continue.

Voici maintenant une propriété nouvelle des coefficients A_k que j'ai rencontrée dans cette recherche.

Pour mettre en évidence la dépendance de $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots,$ du nombre entier n, je désignerai maintenant ces nombres par $A_1^n, A_2^n, \ldots, A^n, \ldots$ Avec cette notation, je trouve qu'on a toujours

$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} < A_1^n + A_2^n + \ldots + A_k^n,$$
$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} > A_1^n + A_2^n + \ldots + A_{k-1}^n.$$

SUR LES

QUADRATURES ALGÉBRIQUES

ET

LOGARITHMIQUES,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Certaines différentielles algébriques s'intègrent algébriquement; d'autres s'intègrent par un seul logarithme. Ce sont là deux cas importants de réduction des intégrales abéliennes.

Liouville a complètement résolu le problème de l'intégration algébrique. Dans ses premières recherches [1], il le ramène à cet autre : *Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque, qui a pour coefficients et pour second membre des polynômes entiers, reconnaître si elle admet pour intégrale particulière une fonction rationnelle.* Mais c'est là encore une question délicate, et Poisson conservait des doutes [2] sur l'efficacité des principes qui permettaient de la traiter dans les cas les plus simples. Liouville reprit le problème et le réduisit à reconnaître si une équation linéaire admet pour intégrale particulière un *polynôme entier.* Ainsi simplifié, le problème ne dépend plus que de la résolution d'un système d'équations du premier degré.

Ces résultats ont été publiés [3] sans démonstration et paraissent

---

[1] *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique,* deux Mémoires (*Journal de l'École Polytechnique,* XXII[e] Cahier; *Mémoires des Savants étrangers,* t. V).

[2] *Rapport* sur les précédents Mémoires (*Journal de Crelle,* t. X).

[3] *Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Comptes rendus,* t. II; *Journal de Liouville,* t. III).

avoir échappé à quelques auteurs. Je commence par les établir; puis, par des considérations analogues à celles qui y conduisent, je montre que, *pour savoir si une différentielle algébrique donnée s'intègre par un seul logarithme, il suffit de connaître un certain entier.* On n'a plus alors qu'à résoudre un système d'équations du premier degré. En terminant, j'applique ce théorème à une intégration qui a occupé Abel [1] et, plus récemment, MM. Tchebichef [2] et Zolotareff [3].

I.

1. Considérons une équation algébrique irréductible

$$F(x,y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots + X_{m-1} y + X_m = 0,$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_m$ représentent des polynômes entiers en x. On sait que toute fonction uniforme t du point (x, y), qui n'a d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques algébriques, est égale à une fonction rationnelle de x et y. Je reprends rapidement la démonstration [4] de ce théorème, parce qu'elle met en œuvre les éléments même que nous rencontrerons dans la suite.

La fonction t est une fonction algébrique de x. Désignons par t_1, $t_2, \ldots, t_m$ ses m déterminations, qui correspondent aux m valeurs y_1, $y_2, \ldots, y_m$ que prend y pour chaque valeur de x, et considérons les m expressions

$$t_1 y_1^\alpha + t_2 y_2^\alpha + \ldots + t_m y_m^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Ce sont des fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots y_m$. Ce sont donc des fonctions rationnelles de x. Soit P leur dénominateur commun; nous pouvons poser

$$(1) \qquad t_1 y_1^\alpha + t_2 y_2^\alpha + \ldots + t_m y_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P} \quad (\alpha = 0, 1, 2, m-1).$$

---

(1) *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, ..., et *Théorie des transcendantes elliptiques*, problème III.

(2) *Journal de Liouville*, 1864 et 1874.

(3) *Théorie des nombres complexes*, Saint-Pétersbourg, 1874.

(4) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, note B.

les lettres $P, P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ représentant des polynômes entiers en x. Du système des m équations (1), tirons l'inconnue t_1 par la méthode des multiplicateurs indéterminés. Multiplions la première de ces équations par A_{m-1}, la seconde par $A_{m-2}, \ldots$, l'avant-dernière par A_1, la dernière par 1, et ajoutons; si nous égalons à zéro les coefficients de $t_2, t_3, \ldots, t_m$, nous obtenons les $m-1$ relations

$$(2)\quad y_\beta^{m-1} + A_1 y_\beta^{m-2} + A_2 y_\beta^{m-3} + \ldots + A_{m-2} y_\beta + A_{m-1} = 0 \quad (\beta = 2, 3, \ldots, m)$$

entre les indéterminées A, et il reste

$$(3)\quad t_1(y_1^{m-1} + A_1 y_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1}) = \frac{P_{m-1} + A_1 P_{m-2} + \ldots + A_{m-1} P_0}{P}.$$

En vertu des relations (2), les multiplicateurs 1, $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sont proportionnels aux coefficients de l'équation

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = X_0 y^{m-1} + (X_0 y_1 + X_1) y^{m-2} + \ldots + (X_0 y_1^{m-1} + \ldots + X_{m-1}) = 0,$$

qui a pour racines $y_2, y_3, \ldots, y_m$. On a donc

$$A_1 = \frac{X_0 y_1 + X_1}{X_0},$$

$$A_2 = \frac{X_0 y_1^2 + X_1 y + X_2}{X_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{m-1} = \frac{X_0 y_1^{m-1} + X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}{X_0}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (3), on en tire

$$t_1 = \frac{1}{P}\,\frac{X_0 P_{m-1} + (X_0 y_1 + X_1) P_{m-2} + \ldots + (X_0 y_1^{m-1} + \ldots + X_{m-1}) P_0}{m X_0 y_1^{m-1} + (m-1) X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}.$$

Remarquons qu'au numérateur de t_1 figure un polynôme entier en y_1, du degré $m-1$, dont le terme en y_1^{m-1} est divisible par X_0, et, au dénominateur, la dérivée partielle de $F(x, y_1)$ par rapport à y_1. Comme y_1 désigne l'une quelconque des valeurs de y et t_1 la valeur correspondante

de t, nous pouvons supprimer les indices et écrire

$$(4)\qquad t = \frac{1}{P}\,\frac{P_0 X_0 y^{m-1} + Q_1 y^{m-2} + \ldots + Q_{m-1}}{F'_y(x, y)}.$$

Les coefficients Q seront des polynômes entiers en x, non divisibles en général par X_0.

2. Nous allons transformer l'expression de t en remplaçant l'inverse de F'_y par un polynôme entier du degré $m - 1$ en y. Considérons le déterminant

$$(5)\qquad X_0\Delta = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots & X_{m-1} & X_m & \ldots & 0 \\ . & .. & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & X_m \\ mX_0 & (m-1)X_1 & (m-2)X_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & mX_0 & (m-1)X_1 & \ldots & X_{m-1} & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & . & . & \ldots & X_{m-1} \end{vmatrix},$$

qui, égalé à zéro, exprime que $F(x, y)$ et $F'_y(x, y)$ ont une racine commune en y. On sait qu'il est égal, à un facteur numérique près, au produit de X_0 par le discriminant

$$F'_{y_1}(x, y_1) F'_{y_2}(x, y_2) \ldots F'_{y_m}(x, y_m)$$

de l'équation $F(x, y) = 0$, considérée comme équation en y seulement. Nous pouvons donc prendre Δ pour ce discriminant.

D'autre part, on ne changera pas la valeur du déterminant $X_0\Delta$ si l'on ajoute aux éléments de la dernière colonne ceux de l'avant-dernière multipliés par y, ceux de la précédente multipliés par y^2, ..., enfin ceux de la première multipliés par y^{2m-2}, ce qui revient à remplacer cette colonne par

$$y^{m-2}F,\ y^{m-3}F,\ \ldots,\ yF,\ F,\ y^{m-1}F'_y,\ y^{m-2}F'_y,\ \ldots,\ yF'_y,\ F'_y.$$

Alors le déterminant, développé suivant les éléments de cette dernière colonne, prend la forme

$$AF + BF'_y.$$

En tenant compte de l'hypothèse $F = 0$ et divisant par X_0 les deux membres de l'identité (5), il vient simplement

$$(6)\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \dots & X_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X_0 & X_1 & \dots & X_{m-1} & X_m & \dots & 0 & 0 \\ . & .. & .. & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & X_{m-1} & 0 \\ m & (m-1)X_1 & (m-2)X_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y^{m-1} \\ 0 & mX_0 & (m-1)X_1 & \dots & X_{m-1} & 0 & \dots & 0 & y^{m-2} \\ . & \dots & \dots\dots\dots & \dots & . & . & \dots & . & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & . & . & \dots & 2X_{m-2} & 1 \end{vmatrix} F'_y.$$

On voit que le déterminant qui multiplie F'_y est un polynôme entier en y, du degré $m-1$, et que son terme en y^{m-1} est divisible par X_0, car il a pour coefficient le déterminant qui se déduit du précédent en supprimant : 1° la ligne et la colonne qui se croisent sur l'élément y^{m-1}; 2° la première ligne et la première colonne. On pourra donc écrire

$$(7)\qquad \Delta = (R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \dots + R_{m-1}) F'_y,$$

les polynômes $R_0, R_1, \dots, R_{m-1}$ n'étant pas en général divisibles par X_0.

L'équation (7) donne

$$\frac{1}{F'_y} = \frac{R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \dots + R_{m-1}}{\Delta}.$$

Portant cette valeur dans la formule (4), il vient

$$t = \frac{(P_0 X_0 y^{m-1} + Q_1 y^{m-2} + \dots + Q_{m-1})(R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \dots + R_{m-1})}{P\Delta}.$$

Le numérateur de t est un polynôme entier du degré $2m-2$ en y. Son terme en y^{2m-2} étant divisible par X_0^2 et le suivant par X_0, on pourra, au moyen de l'équation

$$X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \dots + X_m = 0,$$

l'abaisser au degré $2m-4$ sans que ses coefficients cessent d'être entiers par rapport à X_0; mais à chacune des $m-3$ substitutions qu'il faudra encore opérer pour abaisser ce polynôme du degré $2m-4$ au degré $m-1$, le coefficient X_0 s'introduira comme dénominateur, en

On aura donc

$$(13) \qquad \int S_1\,dx = m\xi_0 + \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \ldots + \xi_{m-1} S_{m-1},$$

en sorte que la fonction ξ_0 sera connue par une quadrature quand on connaîtra les autres fonctions ξ. Une première condition de possibilité du problème sera donc que la fraction rationnelle

$$S_1 = -\frac{X_1}{X_0}$$

ait son intégrale algébrique. C'est ce que l'on reconnaîtra facilement.

On portera la valeur de $\frac{d\xi_0}{dx}$ fournie par la première équation dans les suivantes, et, en résolvant le système ainsi réduit, on aura, pour les $m-1$ dérivées $\frac{d\xi_1}{dx}, \ldots, \frac{d\xi_{m-1}}{dx}$, des expressions linéaires par rapport aux fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$. On pourra donc former par le procédé connu une équation différentielle linéaire d'ordre $m-1$ pour chacune de ces fonctions et appliquer la méthode des coefficients indéterminés, si l'on connaît le dénominateur des fractions cherchées.

5. Ce dénominateur commun des fonctions ξ peut s'obtenir de la manière suivante.

Supposons d'abord que le coefficient X_0 soit constant. Alors y reste fini pour toutes les valeurs finies de x. Il en est de même de l'intégrale z. Les fonctions rationnelles $\frac{P_\alpha}{P}$, formées ici avec z et y comme précédemment avec t et y, restent finies pour toutes les valeurs finies de x. Ce sont des polynômes entiers. Ainsi P se réduit, comme X_0, à une constante, et l'expression générale de t, donnée par l'équation (8), devient

$$z = \frac{C_0}{\Delta} + \frac{C_1}{\Delta} y + \frac{C_2}{\Delta} y^2 + \ldots + \frac{C_{m-1}}{\Delta} y^{m-1}.$$

On voit que, dans le cas présent, les fonctions $\xi_\alpha = \frac{C_\alpha}{\Delta}$ ont pour dénominateur commun le discriminant Δ.

Supposons maintenant que X_0 dépende de x. Ce cas se ramène au

précédent. Posons, en effet, $y = \frac{y'}{T}$, T étant un polynôme déterminé de manière que, dans l'équation entre y' et x, le coefficient de y'^m soit indépendant de x. Ce sera d'ailleurs X_0 lui-même ou un diviseur de X_0. Si l'on a

$$T = T_1 T_2^2 T_3^3 \ldots T_n^n,$$

l'équation $T_1 T_2 T_3 \ldots T_n = 0$ n'ayant que des racines simples, le plus grand commun diviseur de T et de sa dérivée $\frac{dT}{dx}$ sera

$$\theta = T_2 T_3^2 \ldots T_n^{n-1}.$$

Or les seules valeurs finies de x qui puissent rendre infinie l'intégrale

$$z = \int y\,dx = \int \frac{y'}{T}\,dx$$

sont les racines multiples de T. Soit x_0 l'une d'elles, et soit p son ordre de multiplicité. Pour $x = x_0$, les diverses intégrales

$$z_\alpha = \int \frac{y'_\alpha}{T}\,dx$$

seront ou finies ou infiniment grandes d'un ordre au plus égal à celui de $\frac{1}{(x-x_0)^{p-1}}$. Donc les fonctions rationnelles $\frac{P_\alpha}{P}$ auront pour dénominateur commun, soit θ lui-même, soit un diviseur de θ. L'expression générale de t, donnée par l'équation (8), se réduit alors à

$$z = \frac{C_0}{\theta\Delta'} + \frac{C_1}{\theta\Delta'} y' + \frac{C_2}{\theta\Delta'} y'^2 + \ldots + \frac{C_{m-1}}{\theta\Delta'} y'^{m-1},$$

en désignant par Δ' le discriminant de l'équation qui lie y' à x. Par conséquent, on pourra prendre pour dénominateur des fonctions ξ le produit $\theta\Delta'$.

6. *Remarque*. — Outre les résultats qui précèdent, Liouville indique aussi qu'on serait encore ramené à chercher des polynômes entiers (quand X_0 est constant) si l'on prenait pour inconnues, soit les m fonctions

(14) $\rho_{\alpha+1} = \xi_0 S_\alpha + \xi_1 S_{\alpha+1} + \ldots + \xi_{m-1} S_{\alpha+m-1} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, m-1),$

soit les $m - 1$ fonctions

$$(15)\qquad \sigma_{\alpha+1} = \frac{\xi_0}{\alpha}\frac{dS_\alpha}{dx} + \frac{\xi_1}{\alpha+1}\frac{dS_{\alpha+1}}{dx} + \ldots + \frac{\xi_{m-1}}{\alpha+m-1}\frac{dS_{\alpha+m-1}}{dx}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

En effet, $\rho_{\alpha+1}$ n'est pas autre chose que

$$z_1 y_1^\alpha + z_2 y_2^\alpha + \ldots + z_m y_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P},$$

et nous avons vu que les fractions $\frac{P_\alpha}{P}$ se réduisent à des polynômes quand X_0 est constant et ont pour dénominateur θ si X_0 dépend de x.

Quant aux fonctions σ, on a identiquement, d'après la formule (12),

$$S_{\alpha+1} = \frac{d\rho_{\alpha+1}}{dx} - \alpha\sigma_{\alpha+1} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m-1).$$

Ainsi les fonctions σ dépendent des fonctions ρ, dont la détermination revient à celle de polynômes entiers. Une fois les fonctions ρ connues, les m équations (14), où $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ entrent linéairement et qui ont pour déterminant Δ (ou Δ') donneront les valeurs de ces fonctions.

Pour déduire de la détermination des inconnues σ celle des fonctions ξ, il suffirait d'adjoindre l'équation (13) aux $m - 1$ équations (15).

7. *Exemple.* — Nous allons appliquer la méthode de Liouville à un exemple choisi de manière à permettre une vérification immédiate.

Soit à intégrer la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - 3y + 2x = 0.$$

L'intégrale cherchée sera de la forme

$$z = \int y\,dx = \xi_0 + \xi_1 y + \xi_2 y^2.$$

Si l'on calcule les sommes S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, on trouve

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 6, \quad S_3 = -6x, \quad S_4 = 18.$$

Par suite, le système d'équations différentielles (12), que doivent véri-

fier les fonctions ξ, devient

$$0 = \frac{d}{dx}(\xi_0 + 2\xi_2),$$

$$3 = 3\frac{d\xi_1}{dx} - 3x\frac{d\xi_2}{dx} - 2\xi_2,$$

$$-3x = 3\frac{d\xi_0}{dx} - 3x\frac{d\xi_1}{dx} + 9\frac{d\xi_2}{dx} - \xi_1.$$

Portant la valeur de $\frac{d\xi_0}{dx}$ de la première équation dans la troisième et résolvant le système que forment alors les deux dernières, on trouve

$$(\xi)\qquad \begin{cases} 3(1-x^2)\dfrac{d\xi_1}{dx} = x\xi_1 + 2\xi_2 + 3(1-x^2), \\ 3(1-x^2)\dfrac{d\xi_2}{dx} = \xi_1 + 2x\xi_2. \end{cases}$$

De là, on déduit facilement l'équation linéaire du second ordre

$$9(1-x^2)\frac{d^2\xi_2}{dx^2} - 27x\frac{d\xi_2}{dx} - 8\xi_2 = 3.$$

Or le coefficient de y^3 dans l'équation proposée est constant; le discriminant est, à un facteur numérique près, égal à $(1-x^2)$. Nous pouvons donc poser

$$\xi_2 = \frac{C}{1-x^2},$$

C étant un polynôme entier qui devra satisfaire à l'équation

$$9(1-x^2)^2\frac{d^2C}{dx^2} + 9x(1-x^2)\frac{dC}{dx} + (10+8x^2)C = 3(1-x^2)^2.$$

Ici, comme dans tous les autres exemples qu'on pourra avoir à traiter, deux hypothèses se présentent : 1° les termes du plus haut degré du premier membre se réduisent entre eux; 2° ils se réduisent avec le terme de degré le plus élevé du second membre.

Si l'on désigne par λ le degré inconnu du polynôme C, la première supposition conduit actuellement à l'équation

$$9\lambda(\lambda-1) - 9\lambda + 8 = 0,$$

dont les racines sont fractionnaires.

La seconde supposition exige que C soit du second degré. On pourrait poser

$$C = ax^2 + bx + c$$

et chercher à déterminer a, b, c, en identifiant les deux membres de l'équation différentielle; mais il est plus simple ici de remarquer que, en vertu de cette équation même, C est divisible par $(1 - x^2)$. On peut donc prendre

$$C = a(1 - x^2), \quad \frac{dC}{dx} = -2ax, \quad \frac{d^2C}{dx^2} = -2a.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation différentielle, donnent

$$-18(1 - x^2)^2 a - 18x^2(1 - x^2)a + (10 + 8x^2)(1 - x^2)a = 3(1 - x^2)^2$$

ou bien, tous calculs faits,

$$a = -\tfrac{3}{8}.$$

En conséquence, il vient

$$C = -\tfrac{3}{8}(1 - x^2), \quad \xi_2 = \frac{C}{1 - x^2} = -\tfrac{3}{8}.$$

Portant cette valeur de ξ_2 dans la seconde des équations (ξ), on trouve

$$\xi_1 = \tfrac{3}{4}x;$$

quant à ξ_0, on a

$$\xi_0 = -2\xi_2 + \text{const.} = \tfrac{3}{4} + \text{const.}$$

Choisissant la constante arbitraire de manière que ξ_0 soit nul, on obtient facilement

$$z = \frac{6xy - 3y^2}{8}.$$

Ce résultat est facile à vérifier. En effet, on a

$$z = \int y\,dx = xy - \int x\,dy = xy + \tfrac{1}{2}\int (y^3 - 3y)\,dy$$

ou bien, en annulant z avec y,

$$z = xy + \frac{y^4 - 6y^2}{8}.$$

Mais on a aussi

$$y^4 = 3y^2 - 2xy, \quad y^4 - 6y^2 = -3y^2 - 2xy;$$

d'où, en substituant dans l'expression de z,

$$z = \frac{8xy - 2xy - 3y^2}{8} = \frac{6xy - 3y^2}{8};$$

c'est bien ce que nous avions trouvé.

III.

8. *Étant donnée l'équation algébrique irréductible*

$$(16) \quad f(u, \mathrm{U}) = \mathrm{U}^m f_0(u) + \mathrm{U}^{m-1} f_1(u) + \ldots + \mathrm{U} f_{m-1}(u) + f_m(u) = 0,$$

où $f_0, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m$ désignent des polynômes entiers en u, on demande si la fonction u, inverse de l'intégrale

$$z = \int^u \frac{du}{\mathrm{U}},$$

est simplement périodique et n'a en chaque point z qu'un nombre limité de valeurs.

S'il en est ainsi, la fonction u, en vertu d'un théorème dû à MM. Briot et Bouquet [1], est racine d'une équation algébrique, ayant pour coefficients des fonctions entières d'une exponentielle e^{gz}, où le facteur g est constant.

De plus, l'équation proposée présente alors certains caractères que je vais rappeler [2] :

1° Si l'on désigne par δ_k le degré du polynôme $f_k(u)$, on a

$$\delta_m \geqq m - k + \delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Il en résulte que toutes les valeurs de u qui correspondent à $\mathrm{U} = 0$ sont finies; elles sont fournies par l'équation $f_m(u) = 0$.

2° Toute racine multiple d'ordre p de $f_m(u)$ est racine d'ordre $p-1$ au moins de $f_{m-1}(u)$, ..., et, en général, d'ordre $p - l - 1$ au moins de $f_{m-l}(u)$.

---

(1) *Recherches sur la théorie des fonctions* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier, troisième Mémoire : *Intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*).

(2) Voir *Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. XII, p. 117 et 124).

3° Les valeurs c du rapport $\frac{u}{U}$ pour u infini et les valeurs c'_0 du rapport $\frac{du}{dU}$ pour $U = o$ forment une suite de nombres tous commensurables entre eux.

Ces conditions sont nécessaires pour que la fonction u ait la forme analytique proposée; mais, sauf le cas où l'équation $F(u, U) = o$ est du genre zéro, elles ne sont pas suffisantes.

Quand elles sont réalisées, on trouve facilement les valeurs *exactes* de tous les paramètres c et c'_0, et l'on peut déterminer, à un facteur *entier* près, le coefficient g.

Si, parmi les valeurs de U qui deviennent infinies avec u et sont du même ordre que u, il y en a p qui forment un système circulaire, elles donnent, pour le rapport $\frac{u}{U}$, la même valeur c finie et différente de zéro, et l'intégrale z admet la période polaire $2pi\pi c$. Pareillement, si, parmi les valeurs de U qui deviennent nulles pour les racines b de $f_m(u)$ et sont du même ordre que $u - b$, il y en a p' qui forment un système circulaire, elles donnent, pour le rapport $\frac{du}{dU}$, la même valeur c'_0, et l'intégrale z admet la période polaire $2p'i\pi c'_0$.

9. En suivant la marche des opérations qui font connaître le genre d'une courbe algébrique à singularités supérieures ([1]), on déterminera par des calculs purement arithmétiques les divers nombres p et p'. Les diverses quantités pc, $p'c'_0$ sont donc connues; puisqu'elles sont commensurables entre elles, il est aisé de trouver leur plus grand commun diviseur ρ : j'entends par là un nombre réel (qui pourra être incommensurable) ou un nombre imaginaire, tel que les rapports $\frac{pc}{\rho}$, $\frac{p'c'_0}{\rho}$ soient tous des entiers positifs ou négatifs qu'aucun entier ne divise à la fois.

Toutes les périodes polaires sont des multiples de $2i\pi\rho$. Si ces périodes sont les seules que possède l'intégrale z ou si les autres périodes de z sont aussi des multiples de $2i\pi\rho$, l'exponentielle $e^{\frac{z}{\rho}}$ sera une fonction algébrique de u, admettant, pour chaque valeur de u,

---

([1]) *Voir* notre Mémoire déjà cité, *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII, p. 156 et suivantes.

m valeurs et m seulement. Mais il peut arriver que z ait des périodes abéliennes égales à des sous-multiples de $2i\pi\rho$; il existe alors un entier positif λ, tel que $\frac{2i\pi\rho}{\lambda}$ est le plus grand commun diviseur des périodes abéliennes et, par suite, de toutes les périodes de z. Ce n'est plus l'exponentielle $e^{\frac{z}{\rho}}$, mais bien $e^{\frac{\lambda z}{\rho}}$ qui prend m valeurs pour chaque valeur de u.

Il faudrait donc déterminer l'entier inconnu λ. On n'y a pas réussi jusqu'à ce jour; on n'a pas même prouvé que la connaissance de λ permît de répondre à la question posée plus haut. Je vais montrer qu'il en est ainsi.

10. Je supposerai, pour abréger l'écriture quand ρ n'est pas égal à 1, qu'on ait pris pour nouvelle variable $\frac{z}{\rho}$, et je continuerai à l'appeler z; U sera la dérivée de u par rapport à cette nouvelle variable. Les périodes de la nouvelle intégrale z auront pour plus grand commun diviseur $\frac{2i\pi}{\lambda}$, λ *étant un entier que nous considérerons comme connu.*

L'exponentielle $e^{\lambda z}$ est une fonction algébrique de u et admet m valeurs pour chaque valeur de u. En raisonnant sur cette exponentielle, sur u et U, comme on l'a fait, en commençant, sur t, x et y, on arrive à l'expression

$$e^{\lambda z} = \xi_0 + \xi_1 \mathrm{U} + \xi_2 \mathrm{U}^2 + \ldots + \xi_{m-1} \mathrm{U}^{m-1},$$

dans laquelle les lettres ξ représentent des fonctions rationnelles de u.

11. Nous allons, en imitant le procédé de Liouville, établir entre les m fonctions inconnues ξ autant d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Différentions par rapport à z l'équation précédente et, dans la dérivée $\lambda e^{\lambda z}$ du premier membre, remplaçons $e^{\lambda z}$ par sa valeur; on trouve ainsi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda(\xi_0 + \xi_1 \mathrm{U} + \ldots + \xi_{m-1}\mathrm{U}^{m-1}) \\ &\quad = \left(\frac{d\xi_0}{du} + \mathrm{U}\frac{d\xi_1}{du} + \ldots + \mathrm{U}^{m-1}\frac{d\xi_{m-1}}{du}\right)\mathrm{U} \\ &\quad\quad + \left(\xi_1\frac{d\mathrm{U}}{du} + 2\xi_2\mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{du} + \ldots + (m-1)\xi_{m-1}\mathrm{U}^{m-2}\frac{d\mathrm{U}}{du}\right)\mathrm{U},\end{aligned}\right.$$

ou bien, en groupant les termes d'une manière différente,

$$\lambda\xi_0 = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)U + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)U^2 + \ldots + \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)U^{m-1}$$
$$+ \frac{d\xi_{m-1}}{du}U^m + \xi_1 U \frac{dU}{du} + 2\xi_2 U^2 \frac{dU}{du} + \ldots + (m-1)\xi_{m-1} U^{m-1}\frac{dU}{du}.$$

Multipliant les deux membres par U^α, on peut écrire

$$(18)\quad \begin{cases} \lambda\xi_0 U^\alpha = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)U^{\alpha+1} + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)U^{\alpha+2} + \ldots \\ \quad + \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)U^{\alpha+m-1} + \frac{d\xi_{m-1}}{du}U^{\alpha+m} + \frac{\xi_1}{\alpha+2}\frac{d(U^{\alpha+2})}{du} + \ldots \\ \quad + \frac{(m-2)\xi_{m-2}}{\alpha+m-1}\frac{d(U^{\alpha+m-1})}{du} + \frac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m}\frac{d(U^{\alpha+m})}{du}. \end{cases}$$

Attribuons successivement à U les m valeurs $U_1, U_2, \ldots, U_m$ fournies par l'équation $F(u, U) = 0$ et ajoutons membre à membre les m égalités ainsi déduites. En posant

$$S_k = U_1^k + U_2^k + \ldots + U_m^k,$$

nous trouverons

$$(19)\quad \begin{cases} \lambda\xi_0 S_\alpha = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)S_{\alpha+1} + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)S_{\alpha+2} + \ldots \\ \quad + \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)S_{\alpha+m-1} + \frac{d\xi_{m-1}}{du}S_{\alpha+m} + \frac{\xi_1}{\alpha+2}\frac{dS_{\alpha+2}}{du} + \ldots \\ \quad + \frac{(m-2)\xi_{m-2}}{\alpha+m-1}\frac{dS_{\alpha+m-1}}{du} + \frac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m}\frac{dS_{\alpha+m}}{du}. \end{cases}$$

Faisons successivement α égal à $-1, 0, 1, 2, \ldots, (m-2)$ dans cette formule. Nous obtenons un système de m équations différentielles linéaires et du premier ordre par rapport aux fonctions ξ; les coefficients qui y figurent sont des fonctions rationnelles de u. En résolvant ce système, on aura, pour les m dérivées $\frac{d\xi_0}{du}, \ldots, \frac{d\xi_{m-1}}{du}$, des expressions linéaires (et homogènes) par rapport aux fonctions $\xi_0, \ldots, \xi_{m-1}$. On pourra donc former par le procédé connu une équation différentielle linéaire d'ordre m pour chacune de ces fonctions. Ces m équations seront des équations sans second membre, de la forme

$$(20)\qquad \eta_0\frac{d^m\xi}{du^m} + \eta_1\frac{d^{m-1}\xi}{du^{m-1}} + \ldots + \eta_{m-1}\frac{d\xi}{du} + \eta_m\xi = 0,$$

les lettres η désignant des polynômes entiers en u complètement connus, puisque λ est supposé connu.

12. La méthode des coefficients indéterminés sera applicable à chacune des équations (20) quand on aura déterminé le dénominateur commun des fractions rationnelles ξ. En vertu de la formule (8), ce dénominateur est le produit

$$P[f_0(u)]^{m-2}\Delta,$$

Δ étant le discriminant

$$f'_{U_1}(u, U_1)\, f'_{U_2}(u, U_2) \ldots f'_{U_m}(u, U_m)$$

de l'équation $f(u, U) = 0$ et P le dénominateur commun des fractions rationnelles

$$e^{\lambda z_1} U_1^\alpha + e^{\lambda z_2} U_2^\alpha + \ldots + e^{\lambda z_m} U_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Les valeurs finies de u qui rendent infinie l'une de ces fractions sont celles qui rendent infinie l'exponentielle $e^{\lambda z}$ ou la dérivée U. Pour que l'exponentielle $e^{\lambda z}$, *où λ est un entier positif*, devienne infinie, il faut et il suffit que la variable complexe z prenne des valeurs de la forme $\alpha + \beta i$, α et β étant réels, β quelconque et α infiniment grand *et positif*. Or z ne devient infiniment grand, u restant fini, que si U, et par suite $f_m(u)$, s'annulent.

Soit donc $u = b$ une racine de $f_m(u)$. Les valeurs de U qui s'annulent avec $u - b$ sont de l'ordre de $u - b$; l'inverse de l'une d'elles sera, aux environs du point b, représentée par le développement suivant

$$\frac{1}{U} = \frac{c'_0}{u-b} + \ldots,$$

où, d'après nos hypothèses, c'_0 est un entier positif ou négatif. Multiplions par du et intégrons; il vient

$$z = c'_0 \log(u-b) + \ldots.$$

La partie réelle du logarithme népérien de la quantité très petite $(u - b)$ est négative et très grande en valeur absolue. Pour que la partie réelle de z soit positive et très grande, il faut et il suffit que c'_0

soit négatif. Alors l'exponentielle $e^{\lambda z}$ sera, pour $u = b$, de l'ordre de grandeur de $(u-b)^{\lambda c'_0}$, et le dénominateur P sera divisible par $(u-b)^{-\lambda c'_0}$. Désignons par $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_i, \ldots, -\gamma_n$ ceux des paramètres c'_0 qui sont négatifs, et soit $\varphi_i(u)$ le produit des différents binômes $(u-b)$ auxquels correspond la valeur γ_i de c'_0. Le polynôme P sera divisible par le produit

$$\Phi(u) = [\varphi_1(u)]^{\lambda\gamma_1}[\varphi_2(u)]^{\lambda\gamma_2}\ldots[\varphi_i(u)]^{\lambda\gamma_i}\ldots[\varphi_n(u)]^{\lambda\gamma_n}.$$

13. Les valeurs finies de u qui rendent U infini sont les racines de $f_0(u)$. Soit $u = b$ l'une d'elles; supposons qu'on ait, aux environs du point b,

$$U = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + h_1(u-b)^{\frac{-q+1}{p}} + \ldots.$$

L'exponentielle $e^{\lambda z}$ restant finie pour $u = b$, le produit $e^{\lambda z}U^\alpha$ sera infiniment grand et de l'ordre de $(u-b)^{-\frac{\alpha q}{p}}$. Mais, si l'exposant $\frac{\alpha q}{p}$ est fractionnaire, les termes de la somme $\frac{P_\alpha}{P}$ qui sont du degré $-\frac{\alpha q}{p}$ se réduiront entre eux, puisque cette somme est une fonction rationnelle. Si $E(\alpha)$ est le plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha q}{p}$, la fraction $\frac{P_\alpha}{P}$ sera, pour $u = b$, infiniment grande comme $(u-b)^{-E(\alpha)+k}$, k étant un entier positif ou nul. En appliquant cette règle à $\frac{P_{m-1}}{P}$, on voit que P est divisible par $(u-b)^{E(m-1)-k}$. Supposons donc qu'on ait déterminé les exposants $-\frac{q}{p}$ qui commencent les développements des diverses racines U infinies pour $f_0(u)$ nul (cette recherche dépend de simples divisions algébriques) et soit $-\frac{q_0}{p_0}$ le plus grand en valeur absolue de tous ces exposants. Désignons par E le plus grand entier contenu dans $(m-1)\frac{q_0}{p_0}$, et par $\psi_0(u)$ le produit des facteurs binômes distincts de $f_0(u)$; le polynôme P admettra ces facteurs à un degré de multiplicité au plus égal à E. On pourra donc prendre pour P le produit $\Phi(u)[\psi_0(u)]^E$ et, par suite, le dénominateur cherché D sera

$$D = \Phi(u)[\psi_0(u)]^E[f_0(u)]^{m-2}\Delta.$$

14. Voici maintenant deux remarques qui permettront d'abréger les calculs.

Remarque I. — On pourra, dans la plupart des cas, abaisser l'exposant E attribué à tous les facteurs binômes de $\psi_0(u)$, en affectant chacun d'eux du plus grand des exposants $E(m-1)$ qui lui correspondent.

Remarque II. — Dans l'équation proposée

$$f(u,U) = f_0(u)U^m + f_1(u)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0,$$

on peut faire disparaître le terme en U. D'après les conditions rappelées au début, le quotient $\frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)}$ est la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle de u. On peut donc écrire

$$\log\theta(u) = \int \frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)}\, du,$$

$\theta(u)$ désignant une fraction rationnelle qui s'obtient par des divisions algébriques (¹). Si l'on pose

$$z = \int \frac{du}{U} = t - \frac{1}{m}\log\theta(u)$$

et si l'on désigne par W la dérivée $\frac{du}{dt}$, on n'a qu'à différentier par rapport à u pour trouver

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{W} - \frac{1}{m}\frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)}.$$

Substituant dans l'équation proposée, on obtient une nouvelle équation différentielle sans terme en W.

Or, s'il existe une relation algébrique entre la fonction u et une exponentielle $e^{\lambda z}$, il en existera une aussi entre u et l'exponentielle $e^{\lambda t}$, puisqu'on a

$$e^{\lambda z} = [\theta(u)]^{\frac{-\lambda}{m}} e^{\lambda t}.$$

(¹) Voir *Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. XII, p. 150 et suiv.

La réciproque est vraie. On pourra donc, si l'on veut, se borner à considérer des équations sans terme en U.

15. *Application.* — Nous supposerons cette réduction opérée sur l'équation générale du second degré en U, et nous écrirons

$$f_0(u)U^2 + f_2(u) = 0$$

ou, plus simplement,

$$U^2 - B = 0.$$

Par suite, nous aurons

$$S_{-1} = 0, \quad S_0 = 2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2B.$$

Dans le cas de $m = 2$, le système d'équations fourni par la formule (19) est le suivant :

$$\lambda\xi_0 S_{-1} = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right) S_0 + \frac{d\xi_1}{du} S_1 + \xi_1 \frac{dS_1}{du},$$

$$\lambda\xi_0 S_0 = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right) S_1 + \frac{d\xi_1}{du} S_2 + \frac{\xi_1}{2}\frac{dS_2}{du}.$$

En remplaçant S_{-1}, S_0, S_1, S_2 par leurs valeurs, il se réduit à

$$0 = \frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1, \quad 2\lambda\xi_0 = 2B\frac{d\xi_1}{du} + \xi_1\frac{dB}{du}.$$

La première équation fera connaître ξ_1 quand ξ_0 sera déterminé. Si l'on en tire ξ_1 ainsi que sa dérivée, et qu'on substitue dans l'équation suivante, il vient

$$2B\frac{d^2\xi_0}{du^2} + \frac{dB}{du}\frac{d\xi_0}{du} - 2\lambda^2\xi_0 = 0,$$

ou, en tenant compte de l'expression de B,

$$(21) \qquad 2f_0f_2\frac{d^2\xi_0}{du} + (f_0f_2' - f_0'f_2)\frac{d\xi_0}{du} + 2\lambda^2 f_0^2\xi_1 = 0.$$

Pour trouver le dénominateur de ξ_0, revenons aux formules

$$e^{\lambda z_1} = \xi_0 + \xi_1 U_1, \quad e^{\lambda z_2} = \xi_0 + \xi_1 U_2;$$

on en déduit par addition

$$e^{\lambda z_1} + e^{\lambda z_2} = \frac{P_0}{P} = 2\xi_0.$$

Ainsi le dénominateur de ξ_0 est celui de la fraction $\frac{P_0}{P}$. Nous l'avons déterminé au n° 12.

Tout ce qui précède s'applique au célèbre problème posé par Abel : *Étant donnée la différentielle*

$$\frac{(u + A)\,du}{\sqrt{R(u)}}, \quad R(u) = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta,$$

reconnaître si elle s'intègre par un seul logarithme. Nous avons à traiter l'équation

$$f_0 U^2 + f_2 = 0,$$

dont les coefficients ont pour valeurs

$$f_0 = (u + A)^2, \quad f_2 = -R(u).$$

L'équation (21) devient alors

$$2(u + A)R(u)\frac{d^2\xi_0}{du^2} + [(u + A)R'(u) - 2R(u)]\frac{d\xi_0}{du} - 2\lambda^2(u + A)^3\xi_0 = 0.$$

Comme on suppose essentiellement que le polynôme $R(u)$ a ses racines distinctes, les paramètres c'_0 sont tous nuls. L'exponentielle $e^{\lambda z}$ reste finie pour toutes les valeurs finies de u; par suite, ξ_0 est un polynôme entier. Si l'on pose

$$\xi_0 = u^p + a_1 u^{p-1} + \ldots + a_p,$$

le terme du plus haut degré en u dans l'équation différentielle en ξ_0 a pour coefficient

$$2p(p - 1) + 2p - 2\lambda^2 = 2(p^2 - \lambda^2).$$

Égalant ce coefficient à zéro, on voit que p est égal à λ, puisque p et λ

sont tous deux positifs. Ainsi la fonction ξ_0 est un polynôme entier et un polynôme de degré λ.

Il serait facile, dans ce cas particulier, d'arriver directement à cette conclusion; mais il n'était peut être pas sans intérêt de la rattacher à la proposition générale que nous avons établie plus haut.

APPLICATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE

AUX

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES,

PAR P. DUHEM,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

I. — Introduction.

Laplace et Gauss ont fondé la théorie des phénomènes capillaires sur les hypothèses suivantes :

Un liquide en équilibre est formé de particules immobiles; deux quelconques de ces particules s'attirent avec une force F qui est égale au produit des masses m et m' des deux particules et d'une fonction $f(r)$ de la distance r qui les sépare

$$F = mm'(f)r.$$

Cette fonction $f(r)$ devient sensiblement nulle aussitôt que la distance mutuelle des deux particules surpasse une longueur extrêmement petite λ qui porte le nom de *rayon d'activité moléculaire*.

Cette hypothèse est devenue, entre les mains des deux grands géomètres, le point de départ de l'une des théories les plus belles et les plus fécondes de la Physique mathématique.

Poisson, reprenant une idée de Young, éleva des objections contre la supposition, admise par Laplace et par Gauss, de l'homogénéité du fluide. Il chercha à montrer que les particules liquides, voisines de la surface terminale du fluide, placées par conséquent dans des conditions différentes de celles qui règnent à l'intérieur même du fluide, n'ont pas la même densité que les particules éloignées de la surface terminale. Après avoir ainsi compliqué le problème, Poisson en donna la solution. Cette solution est conforme aux résultats de l'analyse de Laplace.

Récemment, M. É. Mathieu [1] a résolu à son tour, d'une manière beaucoup plus simple, le problème posé par Poisson. Il a montré que l'on pouvait, sans compliquer beaucoup les raisonnements de Gauss, les modifier de manière à tenir compte de la variation supposée de la densité au voisinage des surfaces terminales. Toutefois, l'application même des principes de la Mécanique rationnelle au problème dont il s'agit laisse subsister certains doutes dans l'esprit. La légitimité de cette application repose sur les hypothèses suivantes :

1° Le travail effectué durant une modification du liquide par les forces qui le sollicitent est égal à la variation que la fonction des forces subit par l'effet de cette modification;

2° Le principe des vitesses virtuelles s'applique aux modifications que l'on considère.

Ces hypothèses sont-elles admissibles lorsqu'on tient compte du changement de densité que les liquides subissent au voisinage de leur surface terminale? C'est ce que nous allons examiner.

Lorsqu'à la même température, sous la même pression, un même corps se présente sous deux formes ayant des densités différentes, on dit qu'il éprouve un changement d'état. La vaporisation de l'eau, la fusion de la glace sont les exemples les plus connus de ces changements d'état.

L'étude des changements d'état conduit aux conséquences suivantes :

1° Le travail qui les accompagne n'est pas égal à la variation de la fonction des forces calculée à la manière de Gauss.

2° Le principe des vitesses virtuelles n'est pas applicable aux états d'équilibre qui limitent ces changements d'état.

Deux cas, en effet, peuvent se présenter : ou bien, sous les deux états que le corps considéré peut affecter, l'attraction qui s'exerce entre deux molécules de masses m et m', situées à la distance r, est représentée par la même formule

$$F = mm'f(r);$$

ou bien, selon que l'on considère l'un ou l'autre de ces deux états, on doit employer pour $f(r)$ deux fonctions différentes de la distance r.

---

[1] E. MATHIEU, *Théorie de la capillarité*; 1883.

La première hypothèse est-elle admissible? Si elle était exacte, le travail effectué par les forces intérieures, pendant un changement d'état, serait positif ou négatif suivant que le changement d'état serait accompagné d'une contraction ou d'une dilatation. Or l'expérience dément cette proposition. La fusion de la glace est accompagnée d'un travail intérieur négatif, et cependant ce phénomène correspond à une contraction.

Nous devons donc admettre qu'à tout changement d'état du corps correspond un changement de forme de la fonction f. Mais, pour que la variation de la fonction des forces représente le travail effectué par les forces F, il faut que cette variation de la fonction des forces soit due à un changement de valeur des quantités r, et non à un changement de forme de la fonction f. Si la forme de la fonction f vient à changer, la variation subie par la fonction des forces n'a plus, en Mécanique, aucune signification.

En résumé, le travail interne qui accompagne un changement d'état ne peut être représenté par la variation de la fonction des forces calculée à la manière de Gauss.

Pour trouver l'état d'équilibre d'un système susceptible d'éprouver un changement d'état, peut-on lui appliquer le principe des vitesses virtuelles? Il n'en est rien. L'eau et la vapeur saturée, par exemple, sont en équilibre. Cependant, certaines modifications virtuelles du système, par exemple la condensation d'une petite quantité de vapeur, entraînent un travail positif.

Appliquons ces remarques aux phénomènes capillaires.

Concevons une masse liquide, et, pour simplifier, supposons-la soustraite à l'action de la pesanteur et soumise à une pression extérieure normale et uniforme. Prenons ensuite cette même masse, à la même température, sous la même pression, mais après lui avoir donné une autre forme correspondant à une plus grande surface. Certaines parties du liquide qui, dans le premier cas, étaient à une distance sensible de la surface sont, dans le second cas, au voisinage immédiat de cette surface; leur densité a changé, bien que la température et la pression extérieure soient restées invariables. Le liquide a subi, dans certaines de ses parties, un changement d'état.

Nous n'avons *a priori* aucune raison de supposer que des principes

qui, en général, ne s'appliquent pas aux systèmes susceptibles d'éprouver des changements d'état, deviennent d'une application légitime dans les cas particuliers qu'étudie la théorie des phénomènes capillaires.

Donc, si l'on veut tenir compte du changement de nature qu'un liquide peut éprouver au voisinage des surfaces qui le limitent, on se heurte aux difficultés suivantes :

1° Le travail qui accompagne un changement de forme du liquide n'est plus égal à la variation que subit, par l'effet de cette déformation, la fonction des forces du liquide.

2° Pour trouver la figure d'équilibre d'un liquide, il n'est plus permis de faire usage du principe des vitesses virtuelles.

En un mot, si l'on suppose que les liquides éprouvent une modification au voisinage de leurs surfaces terminales, la Mécanique rationnelle devient impuissante à traiter le problème de la capillarité.

Si donc on veut traiter d'une manière logique le problème de la capillarité, au moyen des seules données de la Mécanique rationnelle, on doit négliger, comme l'ont fait Laplace et Gauss, les modifications que les liquides peuvent éprouver au voisinage de leurs surfaces terminales. Si, au contraire, on veut tenir compte de ces modifications, il faut, à l'exemple de Th. Young et des physiciens qui ont adopté la théorie de la tension superficielle, partir d'un principe non justifié par la Mécanique rationnelle.

Il y a là une regrettable lacune. La Thermodynamique permet heureusement de la combler. Ses principes, qui complètent ceux de la Mécanique rationnelle, s'appliquent aux changements d'état, qui échappent aux prises de la Mécanique. Nous verrons, dans ce Mémoire, qu'ils permettent d'édifier la théorie des phénomènes capillaires en tenant compte des changements d'état qui peuvent se produire au voisinage des surfaces terminales.

La théorie des phénomènes capillaires, fondée sur les principes de la Thermodynamique, présente d'ailleurs un avantage qu'il est peut-être bon de signaler; elle affranchit cette partie de la Physique de l'hypothèse de l'attraction moléculaire. Cette hypothèse a donné, dans l'étude des phénomènes capillaires, de magnifiques résultats; mais elle s'est montrée moins heureuse et moins féconde dans plusieurs autres parties de la Physique mathématique. Bien qu'elle ait tout d'abord servi

à édifier la théorie de l'élasticité, Lamé a cherché à l'éliminer des principes de cette science, en attachant une grande importance à cette tentative. De nos jours, les idées des physiciens sur la constitution de la matière ont subi des changements encore plus profonds. Ils ont été amenés à regarder les molécules qui constituent les corps, non comme des points matériels en repos, mais comme des mobiles animés de très grandes vitesses, et cette hypothèse a reçu des développements importants qui constituent la théorie cinétique des gaz. Il y a donc intérêt à donner à la théorie des phénomènes capillaires un fondement indépendant de l'hypothèse de l'attraction moléculaire aujourd'hui si vivement combattue.

On a déjà fait, avant le Travail que nous avons entrepris, plusieurs applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires. Mais ces applications poursuivent un but fort différent de celui que nous venons d'indiquer (¹).

Sir W. Thomson, qui avait fait un si heureux usage du théorème de Carnot dans l'étude de la compressibilité des liquides et de la traction des solides, appliqua le même théorème à l'étude de la quantité de chaleur mise en jeu lors de l'extension d'une lame liquide (²). M. Moutier soumit à des considérations analogues l'ascension des liquides dans les tubes capillaires (³). Le même mode de raisonnement fut employé par M. Lippmann dans l'étude des phénomènes électrocapillaires (⁴). Enfin, M. Van der Mensbrugghe (⁵) a complété la relation donnée par sir W. Thomson en y introduisant un terme qui avait été

(¹) M. J. W. Gibbs, dans la deuxième Partie de son Mémoire : *On equilibrium of heterogeneous substances* (*Trans. Connecticut Acad.*, t. III, p. 343; 1880), a fait une application de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires analogue à celle qui sert de point de départ à notre travail.

(²) W. THOMSON, *On the thermal effect of drawing out a film of liquid* (*Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. XVII, p. 61; 1859).

(³) J. MOUTIER, *Chaleur de capillarité* (*Bulletin de la Société philomathique*, t. X, p. 75; 1873).

(⁴) G. LIPPMANN, *Relations entre les phénomènes électriques et capillaires* (1875, thèse de Doctorat, et *Annales de Chimie et de Physique*, 5ᵉ série, t. V, p. 494).

(⁵) G. VAN DER MENSBRUGGHE, *Applications de la Thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. Conséquences diverses. Communication préliminaire* (*Bulletin de l'Académie de Bruxelles*, Iʳᵉ Partie, t. LI, p. 769; 1876). *Deuxième Communication préliminaire* (IIᵉ Partie, t. LII, p. 21; 1876).

négligé. M. Van der Mensbrugghe a fait de nombreuses applications de la relation ainsi modifiée.

La théorie des phénomènes capillaires que nous allons exposer conduit à la relation de sir W. Thomson et de M. Van der Mensbrugghe. Elle relie donc deux parties, jusqu'ici entièrement isolées, de la théorie des phénomènes capillaires : les équations d'équilibre des liquides, d'une part, et la chaleur mise en jeu dans les modifications capillaires d'autre part.

Elle s'applique encore à d'autres phénomènes physiques, que l'on a cherché à relier de diverses manières à la capillarité; nous voulons parler des phénomènes de surfusion, de sursaturation, des retards d'ébullition, qui ont fait autrefois l'objet des travaux de Donny, de Dufour, et qui, plus récemment, ont pris une si grande importance, grâce aux expériences de M. Gernez.

M. Moutier [1] a cherché à rendre compte des retards d'ébullition en regardant la vaporisation comme un simple mélange du liquide avec l'atmosphère ambiante, et en appliquant à ce phénomène un théorème dû à Athanase Dupré. Mais les raisonnements de M. Moutier conduisent à l'impossibilité de la vaporisation d'un liquide dans le vide. M. Van der Mensbrugghe [2] attribue la surfusion des gouttes d'eau, observée par M. Dufour, à l'influence exercée par les surfaces sur la valeur de la chaleur spécifique de l'eau liquide. Mais cette explication ne rend pas compte des phénomènes de surfusion présentés par l'eau en grandes masses. Sir W. Thomson [3] a montré que la courbure des surfaces liquides exerçait une influence sur la tension de vapeur saturée; il a donné, à cet égard, un curieux théorème reproduit aujourd'hui dans tous les Traités de Physique. Enfin plusieurs physiciens, parmi lesquels je citerai M. H. von Helmholtz [4], attribuent les retards d'ébullition à la pression capillaire qui se produit au sein

---

(1) J. Moutier, *Sur la formation des vapeurs* (*Bulletin de la Société philomathique* 7e série, t. IV, p. 245; 1880).

(2) G. Van der Mensbrugghe, *Deuxième Communication préliminaire* (*loc. cit.*).

(3) W. Thomson, *On the equilibrium of vapour at a curved surface of liquid* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. XLII, p. 448; 1871).

(4) H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgange*, III (*Sitzungsber. der Akad. der Wissensch. zu Berlin*, t. III, p. 662; 1883).

des bulles de vapeur. En présence de cette divergence d'opinions, il ne semblera peut-être pas inutile de tenter une solution nouvelle de cet important problème.

II. — Équations générales de l'équilibre des fluides soustraits à l'action de la pesanteur.

Les fluides que nous avons en général à étudier sont soumis à des forces extérieures : ainsi tous les fluides que nous observons à la surface de la terre sont pesants; mais, dans beaucoup d'expériences, les forces extérieures n'ont qu'une influence secondaire, ou même tout à fait négligeable. L'étude d'un système qui leur serait entièrement soustrait peut donc présenter quelque utilité. Cette étude étant beaucoup plus simple que la théorie des fluides soumis à des forces quelconques, il convient de la faire en premier lieu.

Nous étudierons donc tout d'abord un système soustrait à toute force extérieure, sauf à une pression normale et uniforme agissant sur la surface qui le limite. Nous désignerons par P la valeur de cette pression par unité de surface.

Si le système que nous considérons a en tous les points la même température absolue T, il admet un *potentiel thermodynamique* (¹). Désignons par U l'énergie interne, par S l'entropie, par V le volume total du système, par E l'équivalent mécanique de la chaleur. Le potentiel thermodynamique du système sera défini par l'égalité

$$\Phi = E(U - TS) + PV. \tag{1}$$

Le système est composé d'un certain nombre de corps solides ou fluides, que nous désignerons par les indices 1, 2, ..., p, ..., n. Soient U_p l'énergie interne du corps désigné par l'indice p, S_p son entropie, V_p son volume. Nous aurons les identités

$$U = \sum_{p=1}^{p=n} U_p, \quad S = \sum_{p=1}^{p=n} S_p, \quad V = \sum_{p=1}^{p=n} V_p.$$

(¹) P. Duhem, *Théorie du potentiel thermodynamique* (*Comptes rendus*, t. XCIX, p. 1113; 1884).

Si nous posons

$$\Phi_p = E(U_p - TS_p) + PV_p,$$

nous aurons

$$\Phi = \sum_{p=1}^{p=n} \Phi_p,$$

en sorte que, pour connaître Φ, il suffira d'avoir déterminé Φ_p.

Le corps p présente la même densité, la même constitution chimique et physique, en tous les points pris à une distance des surfaces qui le limitent supérieure à une certaine longueur, d'ailleurs insensible, que nous désignerons par λ. Au contraire, l'état d'une particule située à une distance x, inférieure à λ, de l'une des surfaces qui limitent le corps p, dépend non seulement de l'état sous lequel le corps p se présente à distance des surfaces terminales, mais encore de l'état sous lequel se présente, à une distance suffisante des surfaces, le corps q auquel le corps p confine le long de la surface considérée, et aussi de la distance x de la particule à la surface.

Le corps p peut être en contact par une certaine surface dont $\theta_{p,0}$ représentera l'aire avec la surface qui limite le système; il peut être en contact avec un corps quelconque q du système par une surface dont l'aire sera représentée par $\theta_{p,q}$. Si nous désignons par θ_p la surface totale du corps p, nous aurons

$$\theta_p = \sum_q \theta_{p,q},$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs suivantes de l'indice q :

$$q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n.$$

Par tous les points de la surface θ_p, menons, vers l'intérieur du corps p, des normales à cette surface, et sur chacune de ces normales portons une longueur égale à λ. Les extrémités de toutes ces normales dessineront une deuxième surface θ'_p parallèle à θ_p. Le corps p se trouvera séparé par la surface θ'_p en deux parties : un noyau interne compris à l'intérieur de la surface θ'_p et une couche superficielle d'épaisseur λ, comprise entre les deux surfaces θ_p et θ'_p.

Puisque λ est extrêmement petit, le volume de cette couche a pour valeur $\lambda\theta_p$; si nous désignons par v_p le volume du noyau interne, nous

aurons

$$V_p = v_p + \lambda\theta_p = v_p + \lambda\sum_q \theta_{p,q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

En tous les points du volume v_p, le corps se présente sous le même état physique et chimique; soit D_p la densité qui correspond à cet état; soient u_p l'énergie interne, s_p l'entropie de l'unité de masse du corps pris dans cet état. Le volume v_p fournira à la quantité Φ_p un terme égal à

$$[ED_p(u_p - Ts_p) + P]v_p.$$

Considérons maintenant la partie de la couche superficielle qui a pour base la surface $\theta_{p,q}$, q étant un des indices $0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$. Cette partie a pour volume $\lambda\theta_{p,q}$. La constitution du corps en un point M de ce volume dépend, comme nous l'avons dit, de la nature du corps q et de la distance x du point M à la surface $\theta_{p,q}$.

Sur la surface $\theta_{p,q}$, prenons un élément $d\theta_{p,q}$; sur cet élément pris comme base, construisons un cylindre droit de hauteur λ, traversant toute l'épaisseur de la couche externe; à la distance x de la surface $\theta_{p,q}$, menons une section droite de ce cylindre; traçons une deuxième section droite à la distance $x + dx$ de la même surface. Ces deux sections découpent dans le cylindre un élément de volume qui a pour valeur $d\theta_{p,q}\,dx$. En un point de cet élément de volume, le corps p se présente sous un état qui dépend de x et de la nature du corps q. Soit Δ_p la densité du corps en ce point; soient Υ_p et Σ_p l'énergie et l'entropie de l'unité de masse du corps pris dans l'état dont il s'agit. L'élément de volume que nous considérons fournira à la quantité Φ_p un terme égal à

$$[E\Delta_p(\Upsilon_p - T\Sigma_p) + P]\,d\theta_{p,q}\,dx.$$

Υ_p, Σ_p, Δ_p sont des fonctions de x, dont la forme dépend de l'état sous lequel les corps p et q se présentent à une distance suffisante de la surface terminale $\theta_{p,q}$. Les divers éléments du cylindre droit ayant pour base $d\theta_{p,q}$ fourniront à la quantité Φ_p des termes analogues dont la somme aura pour valeur

$$d\theta_{p,q}\int_0^\lambda [E\,\Delta_p(\Upsilon_p - T\Sigma_p) + P]\,dx = d\theta_{p,q}\int_0^\lambda E\,\Delta_p(\Upsilon_p - T\Sigma_p)\,dx + P\lambda\,d\theta_{p,q}.$$

La somme des termes fournis à la fonction Φ_p par tous les éléments de volume compris à l'intérieur de la partie de la couche interne qui a pour base la surface $\theta_{p,q}$ a pour valeur

$$\mathbf{S}\left[\int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx + \mathrm{P}\lambda\right] d\theta_{p,q}.$$

Le signe $\mathbf{S}$ indique une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\theta_{p,q}$ de la surface $\theta_{p,q}$. Cette sommation équivaut en réalité à une intégration double. La quantité

$$\mathrm{P}\lambda + \int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx$$

a une valeur indépendante du point de la surface $\theta_{p,q}$ où se trouve situé l'élément $d\theta_{p,q}$. La sommation précédente s'effectue donc immédiatement et nous donne pour valeur du terme que la considération de la couche ayant pour base $\theta_{p,q}$ introduit dans Φ_p

$$\left[\mathrm{P}\lambda + \int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx\right]\theta_{p,q}.$$

Nous aurons dès lors

$$\Phi_p = [\mathrm{E}\mathrm{D}_p(u_p - \mathrm{T}s_p) + \mathrm{P}]\,v_p + \sum_q \left[\mathrm{P}\lambda + \int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx\right]\theta_{p,q}$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

Remarquons maintenant que

$$\mathrm{V}_p = v_p + \lambda\sum_q \theta_{p,q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n),$$

et nous pourrons écrire

$$\Phi_p = \mathrm{E}\mathrm{D}_p(u_p - \mathrm{T}s_p) + \sum_q \theta_{p,q}\int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx + \mathrm{P}\mathrm{V}_p$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

La quantité

$$(2) \qquad \mathrm{A}_{p,q} = \int_0^\lambda \mathrm{E}\,\Delta_p(\Upsilon_p - \mathrm{T}\Sigma_p)\,dx - \mathrm{E}(u_p - \mathrm{T}s_p)\int_0^\lambda \Delta_p\,dx$$

dépend uniquement de l'état que les corps p et q présentent loin de la

surface $\theta_{p,q}$; mais elle ne dépend pas de la même manière de l'état du corps p et de l'état du corps q, en sorte que $A_{p,q}$ n'est pas égal à $A_{q,p}$. Nous admettrons, dans ce qui va suivre, que cette quantité a une valeur sensible, en général, malgré l'extrême petitesse de λ, ce qui est possible si la quantité

$$E\Delta_p[(\Upsilon_p - T\Sigma_p) - (u_p - Ts_p)],$$

qui est une fonction de x, prend de très grandes valeurs pour certaines valeurs de x, comprises entre o et λ. Et, comme $u_p - Ts_p$ a une valeur fixe, si l'on admet que Δ_p ne peut pas prendre de très grandes valeurs, parce qu'un corps ne saurait être indéfiniment compressible, on est amené à supposer que $(\Upsilon_p - T\Sigma_p)$ prend de très grandes valeurs pour certaines valeurs de x comprises entre o et λ, ce qui n'offre aucune impossibilité.

En vertu de la définition de la quantité $A_{p,q}$, nous pouvons écrire

$$\Phi_p = E(u_p - Ts_p)\left(v_p D_p + \sum_q \theta_{p,q}\int_0^\lambda \Delta_p\, dx\right) + PV_p + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q}$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

Si nous désignons par M_p la masse du corps p, nous aurons

$$M_p = v_p D_p + \sum_q \theta_{p,q}\int_0^\lambda \Delta_p dx \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n)$$

et, par conséquent,

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi_p = EM_p(u_p - Ts_p) = PV_p + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q} \\ (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression du potentiel thermodynamique du système

$$(4)\qquad \begin{cases} \Phi = \sum_{p=1}^{p=n}\left[EM_p(u_p - Ts_p) + PV_p + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q}\right] \\ (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nous serons assuré que l'état du système est un état d'équilibre stable, si toute modification isothermique virtuelle compatible avec les liaisons du système fait croître la quantité Φ.

Nous obtenons ainsi la condition générale d'équilibre du système au moyen d'une seule hypothèse qui est la suivante : si les divers corps qui constituent le système éprouvent des changements de densité et d'état au voisinage des surfaces terminales, ces variations n'affectent qu'une couche dont l'épaisseur λ a une valeur insensible.

L'extrême petitesse de λ permet souvent d'introduire dans le calcul certaines simplifications. Nous allons en indiquer un exemple.

On peut remplacer, lorsqu'on le trouvera utile, le volume V_p occupé par le corps p par le volume v_p du noyau intérieur. On a, en effet,

$$V_p = v_p + \lambda \sum_q \theta_{p,q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n),$$

et la différence $\lambda \sum_q \theta_{r,q}$ qui existe entre les deux volumes qu'on substitue l'un à l'autre est une quantité de l'ordre de λ, c'est-à-dire une quantité négligeable.

On peut encore remplacer le volume V_p par le volume $\frac{M_p}{D_p}$ qu'occuperait le corps p s'il avait en tous ses points la densité D_p qu'il possède loin des surfaces terminales. On a, en effet,

$$V_p = v_p + \lambda \sum_q \theta_{p,q}, \quad M_p = v_p D_p + \sum_q \theta_{p,q} \int_0^\lambda \Delta_p \, dx,$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

De ces égalités, on déduit

$$\frac{M_p}{D_p} - V_p = \sum_q \theta_{p,q} \int_0^\lambda \frac{\Delta_p - D_p}{D_p} \, dx.$$

La quantité $\frac{\Delta_p - D_p}{D_p}$ a forcément une valeur finie pour toutes les valeurs de x comprises entre o et λ. Le second membre est donc une quantité de l'ordre de λ, c'est-à-dire une quantité négligeable.

Désignons par σ_p le volume spécifique du corps p dans l'état sous lequel il se présente loin des surfaces terminales. Nous aurons

$$\sigma_p = \frac{1}{D_p};$$

d'après ce que nous venons de démontrer, nous pourrons remplacer

V_p par $M_p\sigma_p$, et donner au potentiel thermodynamique la forme suivante :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ M_p[E(u_p - Ts_p) + P\sigma_p] + \sum_q A_{p,q}\, \mathfrak{S}_{p,q} \right\} \\ \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Cette forme donnée au potentiel thermodynamique met en évidence deux propositions importantes :

1° Le potentiel thermodynamique du système se compose de deux parties. L'une de ces parties est une fonction linéaire et homogène des masses des divers corps qui constituent le système; l'autre est une fonction linéaire et homogène des aires des surfaces qui limitent les divers corps du système. Supposons que, sans rien changer à la constitution du système, on augmente ses dimensions dans un certain rapport k. La première partie sera multipliée par k^3, tandis que la seconde partie sera multipliée seulement par k^2. On conçoit donc que, dans l'étude des systèmes formés par des corps ayant des masses suffisamment grandes, il est permis de négliger la seconde partie devant la première. C'est ce qu'on fait ordinairement en Thermodynamique.

2° La première partie représente l'expression que l'on aurait trouvée pour le potentiel thermodynamique en ne tenant pas compte des variations que l'état de chacun des corps qui composent le système éprouve au voisinage des surfaces de séparation. La seconde partie nous représente alors le résultat de la considération de ce changement d'état. Elle a simplement pour effet d'introduire dans l'expression du potentiel une fonction linéaire et homogène des aires des surfaces que renferme le système. Les coefficients de cette fonction dépendent de l'état interne des deux corps que sépare la surface à laquelle chacun d'eux est affecté.

III. — Influence de la pesanteur.

Il serait maintenant facile de traiter le cas où le système, au lieu d'être soumis uniquement à l'action d'une pression normale et uniforme, serait soumis non seulement à une telle pression, mais encore à d'autres forces extérieures admettant un potentiel W. Il suffirait, en effet, d'a-

jouter à l'expression de Φ, que nous venons d'obtenir, le potentiel W des forces extérieures nouvellement introduites pour obtenir l'expression du potentiel thermodynamique du système soumis à l'action de ces forces.

Mais cette manière de procéder suppose :

1° Que l'introduction des nouvelles forces ne trouble pas l'homogénéité de chacun des corps qui constituent le système;

2° Que la pression extérieure reste une pression normale et uniforme.

En général, ces conditions ne sont pas remplies. Si, par exemple, les nouvelles forces introduites sont les actions de la pesanteur, chaque couche de l'un des fluides que le système peut renfermer sera comprimée par toutes les couches situées au-dessus d'elle; elle subira donc une compression variable suivant la hauteur à laquelle elle sera située dans le fluide; par conséquent, le fluide aura une densité variable d'un point à un autre. De plus, la pression extérieure ne pourra plus être uniforme. Elle devra varier d'un point à un autre, en vertu des principes de l'Hydrostatique.

Toutefois, Gauss, dans sa *Theoria generalis figuræ fluidorum in statu æquilibrii*, n'a pas hésité à négliger ces deux influences perturbatrices. Si nous adoptons la même approximation, il nous suffira, pour obtenir le potentiel d'un système soumis à l'action de la pesanteur, d'ajouter à l'expression précédente de Φ le potentiel W des poids des diverses parties de ce système.

Si nous désignons par dM une masse élémentaire du système, par z sa hauteur au-dessus d'un plan horizontal arbitraire, et par g l'intensité de la pesanteur au lieu considéré, nous aurons

$$W = g \mathop{\mathrm{S}} z\, dM.$$

Le symbole S désigne une sommation qui s'étend à tous les éléments dM de la masse du système. Ce symbole équivaut, en réalité, à une intégration triple. Nous pouvons écrire

$$\mathop{\mathrm{S}} z\, dM = \sum_{p=1}^{p=n} \mathop{\mathrm{S}}_p z\, dM_p,$$

le symbole $\mathbf{S}_p$ désignant une sommation qui s'étend à tous les éléments dM_p du corps p. Ayant ainsi trouvé l'expression de W, il ne nous reste plus, pour trouver l'expression du potentiel d'un système soumis à l'action de la pesanteur, qu'à ajouter cette valeur de W à l'expression de Φ trouvée dans l'article précédent. Si nous faisons usage de l'expression de Φ donnée par l'égalité (4), nous trouverons

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \left[EM_p(u_p - Ts_p) + PV_p + g \mathbf{S}_p z\,dM_p + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q} \right] \\ \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Si, au contraire, nous faisons usage de l'expression de Φ donnée par l'égalité (5), nous trouverons

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \left\{ M_p[E(u_p - Ts_p) + P\sigma_p] + g \mathbf{S}_p z\,dM_p + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q} \right\} \\ \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

L'extrême petitesse de λ permet de remplacer l'expression de W à laquelle nous sommes arrivés par d'autres expressions plus commodes dans certains cas. Nous ne nous arrêterons pas à ces transformations, analogues à celles que nous avons fait subir à la quantité PV_p à la fin de l'article précédent.

Nous allons maintenant appliquer les divers résultats que nous venons d'obtenir à l'étude des divers problèmes dont l'ensemble constitue la théorie de la capillarité. Nous commencerons par examiner les lois des phénomènes capillaires proprement dits.

IV. — Phénomènes capillaires proprement dits.

Dans les problèmes qui constituent, à proprement parler, la théorie de la capillarité, l'objet que l'on se propose est le suivant : on se donne l'état que les divers corps qui composent le système présentent loin des surfaces terminales, et l'on cherche les figures que doivent prendre, pour être en équilibre, les divers fluides que renferme le système.

Pour résoudre ces problèmes, il suffira, en maintenant constant l'état que les divers corps présentent loin des surfaces de séparation, de donner à la figure de chacun des fluides, ou de quelques-uns d'entre eux, une déformation infiniment petite compatible avec les liaisons auxquelles le système est assujetti, et d'écrire qu'il en résulte pour Φ une variation nulle.

Dans cette déformation, les quantités M_p, D_p, u_p, s_p, σ_p demeurent invariables pour chaque corps. On peut donc, en désignant par C une quantité qui reste constante dans ces déformations, écrire

$$C = \sum_{p=1}^{p=n} M_p [E(u_p - T s_p) + P\sigma_p].$$

Le potentiel thermodynamique du système aura alors pour expression

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = C + \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \left\{ g \mathbf{S}_p z\, dM_p + \sum_q A_{p,q} \theta_{p,q} \right\} \\ (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n) \end{array} \right.$$

si le système est soumis à l'action de la pesanteur, et

$$(9)\qquad \Phi = C + \sum_{p=1}^{p=n} \sum_q A_{p,q} \theta_{p,q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n)$$

si le système est soustrait à cette action.

De plus, puisque l'état que les corps p et q présentent à une distance suffisante de la surface $\theta_{p,q}$ qui les sépare est supposé invariable, la quantité $A_{p,q}$ est une quantité constante. Si donc on désigne par le symbole δ la variation qu'une quantité quelconque éprouve par suite d'une déformation virtuelle opposée au système, on obtiendra, pour expression de la variation $\delta\Phi$ que Φ éprouve à la suite d'une telle déformation,

$$(10)\qquad \delta\Phi = \sum_{p=1}^{p=n} \left(g \mathbf{S}_p dM_p\, \delta z + \sum_q A_{p,q}\, \delta\theta_{p,q} \right)$$

si le système est soumis à l'action de la pesanteur, et

$$(11) \qquad \delta\Phi = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_q A_{p,q}\,\delta\theta_{p,q}$$

si le système est soustrait à cette action.

Ces valeurs de $\delta\Phi$ nous permettront aisément d'exprimer que Φ est minimum, ce qui est la condition pour que l'état du système soit un état d'équilibre stable.

Nous allons en déduire les principales lois des phénomènes capillaires, en supposant tout d'abord qu'il s'agisse d'un système soustrait aux actions de la pesanteur.

Nous remarquerons tout d'abord que les variations $\delta\theta_{p,q}$, imposées aux surfaces $\theta_{p,q}$, doivent être compatibles avec les liaisons du système. Parmi celles-ci se trouve la condition que la masse M_p de chacun des corps p demeure invariable; comme d'ailleurs D_p est aussi supposé invariable, le volume V_p, qui est sensiblement égal à $\frac{M_p}{D_p}$, doit demeurer sensiblement invariable. Les déformations imposées aux surfaces qui séparent les divers corps du système doivent laisser invariable le volume de chacun des corps qui le composent.

Supposons que les deux corps p et q soient tous deux à l'état fluide, de telle sorte qu'on puisse déformer la surface $\theta_{p,q}$ qui les sépare. Déformons cette surface sans altérer son contour. Supposons, en outre, que, par cette déformation, une partie de la surface refoule le fluide p de manière à augmenter le volume occupé par le fluide q, tandis qu'une autre partie refoulera le fluide q de manière à augmenter le volume occupé par le fluide p d'une quantité égale à celle dont la première déformation avait diminué ce volume. Laissons enfin invariables toutes les autres surfaces que renferme le système. Nous aurons imaginé une déformation virtuelle compatible avec les liaisons du système. Dans cette déformation, nous aurons

$$\delta\Phi = (A_{p,q} + A_{q,p})\,\delta\theta_{p,q}.$$

Deux cas sont alors à considérer : si $(A_{p,q} + A_{q,p})$ est positif, le minimum de Φ correspondra au minimum de $\theta_{p,q}$; au contraire, si $(A_{p,q} + A_{p,q})$ est négatif, le minimum de Φ correspondra au maximum de $\theta_{p,q}$. Or il

est bien facile de voir que $\theta_{p,q}$ ne saurait admettre de maximum; quelle que soit la forme de la surface $\theta_{p,q}$, on peut toujours la déformer de la manière que nous avons indiquée, de telle façon que son aire augmente. Si donc $(A_{p,q} + A_{q,p})$ est négatif, Φ n'admettra pas de minimum, le système n'admettra pas de position d'équilibre stable.

La possibilité, pour le système, de présenter une position d'équilibre stable est donc soumise à la restriction suivante : si p et q désignent deux fluides du système en contact l'un avec l'autre, l'inégalité

$$A_{p,q} + A_{q,p} > 0 \tag{12}$$

est vérifiée.

Il va sans dire que l'on peut raisonner de même lorsque l'indice q a la valeur 0, c'est-à-dire lorsque la surface considérée est une des surfaces qui limitent le système; dans ce cas, on a l'égalité

$$A_{0,p} = 0,$$

et la condition précédente se réduit à

$$A_{p,0} > 0. \tag{13}$$

Si la condition (12) est vérifiée et si l'on désigne par R et R′ les deux rayons de courbure principaux en un point de la surface $\theta_{p,q}$, ces deux rayons étant comptés positivement d'un côté déterminé de la surface $\theta_{p,q}$, à l'intérieur du fluide p, par exemple, la surface $\theta_{p,q}$ est définie par l'équation différentielle

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.} \tag{14}$$

Les méthodes employées par Gauss ou par M. J. Bertrand s'appliquent, sans modification, à la théorie actuelle. Elles permettent de trouver les valeurs des angles de raccordement qui jouent, dans l'intégration de l'équation différentielle précédente, le rôle de conditions aux limites.

Si un solide r plonge dans deux fluides p et q, si l'on désigne par i l'un des angles du plan tangent à la surface de séparation des fluides avec le plan tangent à la surface du solide en un point commun à ces deux surfaces et si l'on choisit celui de ces angles qui, au voisinage du

point considéré, renferme à son intérieur le fluide p, on aura

$$\cos i = \frac{(A_{q,r} + A_{r,q}) - (A_{p,r} + A_{r,p})}{A_{p,q} + A_{q,p}}. \tag{15}$$

La méthode employée par M. E. Mathieu permettra aussi de déduire de nos formules la valeur des angles sous lesquels trois fluides se raccordent. Si nous désignons ces fluides par les lettres p, q, r, et si nous représentons par les mêmes lettres les angles dièdres formés par les plans tangents aux trois surfaces de séparation en un point commun à ces trois surfaces, nous aurons

$$\frac{\sin p}{A_{q,r} + A_{r,q}} = \frac{\sin q}{A_{r,p} + A_{p,r}} = \frac{\sin r}{A_{p,q} + A_{q,p}}. \tag{16}$$

Si nous supposons le liquide soumis à l'action de la pesanteur, toutes ces équations subsisteront, sauf l'équation différentielle de la surface $\theta_{p,q}$ qui deviendra plus compliquée et prendra la forme suivante :

$$z - \frac{1}{g} \frac{A_{p,q} + A_{q,p}}{D_p - D_q} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \text{const.} \tag{17}$$

Telles sont les équations fondamentales qui règlent les phénomènes capillaires. On les obtient par une méthode calquée sur la théorie de Gauss. La théorie mécanique de la chaleur conduit donc aux mêmes conséquences que la théorie de Gauss. Mais, pour obtenir ces conséquences, elle ne fait qu'une seule hypothèse, dont la légitimité ne peut être révoquée en doute par personne; cette hypothèse est la suivante : si les divers corps éprouvent des modifications au voisinage de leurs surfaces terminales, ces modifications n'atteignent qu'une couche infiniment mince.

Nous avons indiqué comment on pouvait obtenir les équations fondamentales de la capillarité; mais les conditions qu'elles expriment ne suffisent pas à assurer l'équilibre d'une manière complète. Elles l'assureraient si l'état que chacun des corps du système présente à une distance suffisante des surfaces de séparation était invariable comme on l'a supposé dans les modifications virtuelles qui ont fourni ces conditions; mais, en réalité, cet état est variable. Quel que soit cet état,

l'équilibre ne peut être assuré que si les conditions précédentes sont réalisées; mais il faut, en outre, pour l'assurer, d'autres conditions exprimant que l'état des divers corps qui constituent le système n'est pas susceptible de changement.

Cherchons d'abord la condition qui exprime que chacun des corps qui constituent le système, gardant son état physique et chimique, n'est plus susceptible de se comprimer ou de se dilater, qu'il a acquis la densité correspondant à l'équilibre.

Considérons un des fluides du système que nous désignerons par l'indice p et que nous supposerons en contact le long de l'aire $\theta_{p,0}$ avec la surface qui limite le système. Cette surface supporte une pression normale uniforme que nous avons désignée par P. Lorsqu'on déforme le fluide p sans faire varier son volume, il se produit un travail non compensé. Si ce travail se réduisait au travail de la pression P, qui est nul dans ce cas, le fluide serait soumis aux lois de l'Hydrostatique, et la pression en un point quelconque pris à l'intérieur du fluide aurait pour valeur P. La densité du fluide aurait une valeur $\mathfrak{D}_p$, liée à P par la loi de compressibilité du fluide.

En réalité, il n'en est pas ainsi. La déformation de la surface $\theta_{p,0}$ engendre un travail non compensé qui ne se réduit pas au travail de la pression P. La pression à l'intérieur du fluide peut alors avoir une valeur Π différente de P; la densité D_p, que le fluide présente au sein du noyau interne est liée par la loi de compressibilité, non pas à la pression P, mais à la pression Π. Nous allons chercher la relation qui existe entre P et Π.

Soit $L_p\, d\sigma_p$ la quantité de chaleur équivalente au travail interne effectué lorsque le volume de l'unité de masse du corps p, supposée prise sous l'état qu'elle présente au sein du noyau interne, augmente de $d\sigma_p$ à la température constante T. Les principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur nous fournissent les deux égalités suivantes :

$$du_p = -L_p\, d\sigma_p,$$

$$ds_p = -\frac{1}{T}(L - A\Pi)\, d\sigma_p,$$

A étant l'équivalent calorifique du travail, c'est-à-dire la quantité $\frac{1}{E}$.

De ces deux relations, nous déduisons

(18) $$\frac{\partial}{\partial \sigma_p} \mathrm{E}(u_p - \mathrm{T}s_p) = -\Pi.$$

Remarquons maintenant que nous pouvons remplacer V_p par $\mathrm{M}_p\sigma_p$, ce qui nous donne

$$\frac{d\sigma_p}{d\mathrm{V}_p} = \frac{1}{\mathrm{M}_p},$$

et nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{V}_p} \mathrm{E}(u_p - \mathrm{T}s_p) = \frac{\partial}{\partial \sigma_p} \mathrm{E}(u_p - \mathrm{T}s_p) \frac{d\sigma_p}{d\mathrm{V}_p} = -\frac{\Pi}{\mathrm{M}_p}.$$

Nous en déduisons

(18 *bis*) $$\frac{\partial}{\partial \mathrm{V}_p} [\mathrm{EM}_p(u_p - \mathrm{T}s_p)] = -\Pi.$$

Cette formule va nous permettre de trouver la relation qui existe entre Π et P. Supposons que la surface $\theta_{p,0}$ se déforme; que toutes les autres surfaces $\theta_{p,q}$ qui limitent le fluide p demeurent invariables; que, par suite de cette variation, le volume du fluide p augmente de $\delta\mathrm{V}_p$ et son volume spécifique de $\delta\sigma_p$. Cette variation du volume spécifique du fluide p fait varier toutes les quantités telles que $\mathrm{A}_{p,q}$ et $\mathrm{A}_{q,p}$. Le potentiel thermodynamique du système, pris sous la forme donnée par l'égalité (4), éprouve donc la variation suivante :

$$\begin{aligned} \delta\Phi = {} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{V}_p} [\mathrm{EM}_p(u_p - \mathrm{T}s_p)]\,\delta\mathrm{V}_p + \mathrm{P}\,\delta\mathrm{V}_p \\ & + \sum_q \theta_{p,q} \frac{\partial(\mathrm{A}_{p,q} + \mathrm{A}_{q,p})}{\partial \sigma_p} \delta\sigma_p + \theta_{p,0} \frac{\partial \mathrm{A}_{p,0}}{\partial \sigma_p} \delta\sigma_p + \mathrm{A}_{p,0}\,\delta\theta_{p,0} \\ & (q = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

ou

$$\delta\Phi = \left\{ \mathrm{P} - \Pi + \frac{1}{\mathrm{M}_p} \left[\theta_{p,0} \frac{\partial \mathrm{A}_{p,0}}{\partial \sigma_p} + \sum_q \theta_{p,q} \frac{\partial(\mathrm{A}_{p,q} + \mathrm{A}_{p,q})}{\delta \sigma_p} \right] \right\} \delta\mathrm{V}_p + \mathrm{A}_{p,0}\,\delta\theta_{p,0}.$$

Pour l'équilibre, cette quantité doit être égale à zéro.

Un théorème important, dû à M. Bertrand, nous fournit une relation entre les deux variations $\delta\mathrm{V}_p$ et $\delta\theta_{p,0}$.

Soit $d\theta_{p,0}$ un élément de la surface $\theta_{p,0}$. Cet élément se projette normalement sur la surface déformée $\theta'_{p,0}$ suivant un second élément qui a

pour aire

$$d\theta_{p,0} + \delta(d\theta_{p,0}).$$

On a alors

$$\delta\theta_{p,0} = \mathbf{S}\,\delta(d\theta_{p,0}),$$

le signe $\mathbf{S}$ désignant une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\theta_{p,0}$ de la surface $\theta_{p,0}$.

Soit ε la distance normale, au point considéré, des deux surfaces $\theta_{p,0}$ et $\theta'_{p,0}$, comptée positivement lorsque la surface déformée est, au point considéré, en dehors du fluide p. Soient R et R' les deux rayons de courbure principaux de la surface $\theta_{p,0}$, au point considéré, ces deux rayons étant comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants sont à l'intérieur du fluide p. Le théorème de M. Bertrand consiste dans la relation suivante :

$$\delta(d\theta_{p,0}) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon\, d\theta_{p,0}.$$

On a donc

$$\delta\theta_{p,0} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon\, d\theta_{p,0}.$$

Mais nous supposons que le fluide p a pris sa figure d'équilibre. On a donc, en vertu de la relation (14),

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.},$$

ce qui nous permet d'écrire, en désignant maintenant par R et R' les rayons de courbure en un point arbitrairement choisi sur la surface $\theta_{p,0}$,

$$\delta\theta_{p,0} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\mathbf{S}\,\varepsilon\, d\theta_{p,0}.$$

D'ailleurs il n'est pas difficile de voir que

$$\delta V_p = \mathbf{S}\,\varepsilon\, d\theta_{p,0}.$$

On a donc

$$\delta\theta_{p,0} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_p.$$

En reportant cette expression de $\delta\theta_{p,0}$ dans l'expression de $\delta\Phi$ et égalant à zéro le coefficient de δV_p, on obtiendra la condition d'équilibre. Cette condition est la suivante :

$$\Pi = P + A_{p,0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \psi, \tag{19}$$

relation dans laquelle ψ est défini de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \dfrac{1}{M_p}\left[\theta_{p,0}\dfrac{\partial A_{p,0}}{\partial \sigma_p} + \sum_q \theta_{p,q}\dfrac{\partial(A_{p,q}+A_{q,p})}{\partial \sigma_p}\right] \\ \qquad (q = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{20}$$

Considérons de même deux fluides p et q en contact; désignons par Π_p la pression en un point à l'intérieur du fluide p, et par Π_q la pression en un point du fluide q. Soient R et R' les rayons de courbure principaux en un point choisi arbitrairement sur la surface $\theta_{p,q}$ de séparation des deux fluides. Supposons ces rayons comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants sont à l'intérieur du fluide p. En raisonnant comme nous venons de le faire, nous trouverons la relation suivante :

$$\Pi_p - \Pi_q = (A_{p,q} + A_{q,p})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \psi_p - \psi_q, \tag{21}$$

relation dans laquelle ψ_p et ψ_q sont définis de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_p = \dfrac{1}{M_p}\left[\theta_{p,0}\dfrac{\partial A_{p,0}}{\partial \sigma_p} + \sum_r \theta_{p,r}\dfrac{\partial(A_{p,r}+A_{r,p})}{\partial \sigma_p}\right] \\ \qquad (r = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n), \\ \psi_q = \dfrac{1}{M_q}\left[\theta_{q,0}\dfrac{\partial A_{q,0}}{\partial \sigma_p} + \sum_s \theta_{q,s}\dfrac{\partial(A_{q,s}+A_{s,q})}{\partial \sigma_q}\right] \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{22}$$

Si, dans les relations (19) et (21), on remplace les quantités ψ, ψ_p, ψ_q par des constantes, on trouve les relations que Laplace avait déduites de la théorie de l'attraction. Mais une semblable transformation ne saurait être permise, car ces quantités varient avec les masses M_p et M_q et s'annulent lorsque ces masses deviennent très considérables.

V. — Chaleur dégagée durant un phénomène capillaire.

La connaissance du potentiel thermodynamique d'un système nous permet d'exprimer la quantité de chaleur mise en jeu par l'effet d'une modification du système. Rappelons à ce sujet quelques principes généraux de la théorie du potentiel thermodynamique.

Considérons un système dont l'état est défini par la température absolue T et par un certain nombre d'autres paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$. Soient

U l'énergie interne;
S l'entropie;
V le volume total de ce système.

Supposons que la surface qui limite ce système supporte une pression normale, uniforme et constante que nous désignerons par P. Ce système admet un potentiel thermodynamique Φ, et l'on a

$$\Phi = E(U - TS) + PV. \tag{1}$$

La condition d'équilibre du système est la suivante : quelles que soient les variations $\delta\alpha_p$, on doit avoir

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_p} \delta\alpha_p = 0, \tag{23}$$

ce qui revient aux égalités suivantes :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_p} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} = 0, \tag{23 bis}$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = E\left(\frac{\partial U}{\partial T} - T\frac{\partial S}{\partial T}\right) - ES + P\frac{\partial V}{\partial T}.$$

Supposons que, tous les paramètres étant maintenus constants, on fasse croître la température de dT. Le système dégagera une quantité

de chaleur dQ_1, et l'on aura

$$dQ_1 = -\frac{\partial U}{\partial T}\,dT - AP\frac{\partial V}{\partial T}\,dT.$$

En vertu des égalités (23 *bis*), le système est en équilibre. La modification considérée est donc réversible, ce qui permet d'écrire

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T}\,dT = -\frac{1}{T}\,dQ_1.$$

En remplaçant dans cette égalité dQ_1 par sa valeur, nous trouvons

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{1}{T}P\frac{\partial V}{\partial T}.$$

En reportant cette valeur de $\frac{\partial S}{\partial T}$ dans l'expression de $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$, nous trouvons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -ES.$$

En substituant cette valeur de $-ES$ dans l'expression de Φ, on trouve

$$EU + PV = \Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}.$$

Supposons que le système éprouve une transformation sous la pression constante P. La température T variera de dT; les paramètres α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$ croîtront de $d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_p, \ldots, d\alpha_n$; le système dégagera la quantité de chaleur de dQ_1, et l'on aura

$$dQ = -dU - AP\,dV,$$

ou bien

$$E\,dQ = -\frac{\partial}{\partial T}(EU + PV)\,dT - \sum_{p=1}^{p=n}\frac{\partial}{\partial \alpha_p}(EU + PV)\,d\alpha_p.$$

En remplaçant $(EU + PV)$ par son expression en fonction de Φ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$, on trouve

$$dQ = -A\frac{\partial}{\partial T}\left(\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)dT - A\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\partial}{\partial \alpha_p}\left(\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)d\alpha_p.$$

Mais on a

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) = -T\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_p}\left(\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_p} - T\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T\,\partial \alpha_p}.$$

En vertu des égalités (23 *bis*), cette dernière égalité se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_p}\left(\Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) = -T\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T\,\partial \alpha_p}.$$

On a donc finalement

$$dQ = AT\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} + \sum_{p=1}^{p=n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T\,\partial \alpha_p}\right),$$

ou, en désignant par d une différentielle totale par rapport aux variables $T, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$,

$$dQ = AT\,d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right). \tag{24}$$

Cette équation est générale. Elle suppose seulement que le système a la même température T en tous ses points, et est soumis à une pression normale, uniforme et constante P. Nous allons appliquer cette égalité aux systèmes étudiés précédemment.

Pour ces systèmes, on a, en vertu de l'égalité (5),

$$\Phi = \sum_{p=1}^{p=n}\left\{ M_p[E(u_p - Ts_p) + P\sigma_p] + \sum_q A_{p,q}\theta_{p,q} \right\}$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

Nous supposerons que, parmi les paramètres indépendants qui servent à définir l'état du système, se trouvent la température T, la masse M_p de chacun des corps qui constituent le système, le volume spécifique σ_p de chacun d'eux, enfin les diverses surfaces $\theta_{p,q}$. Il se peut que les paramètres ne suffisent pas à définir l'état du système; mais, pourvu que ces paramètres soient choisis comme variables indépendantes, ce que nous allons dire pourra s'appliquer.

Nous avons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ M_p [E(u_p - T s_p) + P \sigma_p] + \sum_q A_{p,q} \theta_{p,q} \right\}$$

$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

En général, on a, en désignant par Π_p la pression à l'intérieur du corps p,

$$\frac{\partial s_p}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial u_p}{\partial T} - \frac{A}{T} \Pi_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial T}.$$

Mais, σ_p étant une variable indépendante, $\frac{\partial \sigma_p}{\partial T} = 0$. Par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ M_p [E(u_p + T s_p) - P \sigma_p] \right\} = -E M_p s_p.$$

D'autre part, $\theta_{p,q}$ étant une variable indépendante, on a

$$\frac{\partial}{\partial T} (A_{p,q} \theta_{p,q}) = \theta_{p,q} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial T}.$$

On a donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -E \sum_{p=1}^{p=n} M_p s_p + \sum_{p=1}^{p=n} \sum_q \left(\theta_{p,q} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial T} \right)$$

et

$$dQ = -T\, d\left(\sum_{p=1}^{p=n} M_p s_p \right) + AT\, d\left(\sum_{p=1}^{p=n} \sum_q \theta_{p,q} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial T} \right)$$

$$(q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n).$$

Si les divers corps qui constituent le système avaient au voisinage des surfaces terminales l'état sous lequel ils se présentent à une certaine distance de ces surfaces, l'entropie du système aurait pour valeur

$$s = \sum_{p=1}^{p=n} M_p s_p.$$

La modification considérée dégagerait alors une quantité de chaleur dq,

et l'on aurait

$$dq = -\mathrm{T}\,ds = -\mathrm{T}\,d\left(\sum_{p=1}^{p=n} \mathrm{M}_p s_p\right).$$

On peut donc écrire

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} d\mathrm{Q} - dq = \mathrm{AT}\,d\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}\sum_q \theta_{p,q}\frac{\partial \mathrm{A}_{p,q}}{\partial \mathrm{T}}\right) \\ (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Cette relation nous montre l'influence que les changements d'état qui se produisent au voisinage des surfaces terminales exercent sur les phénomènes thermiques qui accompagnent une modification quelconque du système. Cette relation est due à M. Van der Mensbrugghe. Avant lui, Sir W. Thomson avait donné la relation

$$d\mathrm{Q} - dq = \mathrm{AT}\sum_{p=1}^{p=n}\sum_q \frac{\partial \mathrm{A}_{p,q}}{\partial \mathrm{T}}\,d\theta_{p,q}.$$

Cette relation n'est pas complète. Il faut, pour la compléter, ajouter au second membre le terme

$$\mathrm{AT}\sum_{p=1}^{p=n}\sum_q \theta_{p,q}\,d\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{p,q}}{\partial \mathrm{T}}\right).$$

Nous renverrons aux Mémoires de Sir W. Thomson, de M. Moutier et de M. Van der Mensbrugghe pour l'examen des conséquences que l'on peut tirer de l'égalité (25). Nous avions simplement pour but de montrer comment cette égalité peut se déduire de la théorie du potentiel thermodynamique, et aussi de prouver qu'elle n'est pas modifiée par les complications que l'étude des changements d'état superficiels introduit dans la théorie des phénomènes capillaires.

VI. — Changements d'état. — Vaporisation.

Nous allons maintenant appliquer les principes précédents à la théorie des changements d'état; nous nous occuperons, en premier lieu, de la vaporisation.

Considérons un système composé de la manière suivante :

Une masse liquide extrêmement grande, que nous désignerons par l'indice (1), entoure une bulle de vapeur que nous désignerons par l'indice (2). La surface $\theta_{1,0}$, qui limite le liquide, a en tous ses points des courbures $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$ infiniment petites. Les courbures de la surface $\theta_{1,2}$ qui sépare le liquide de la vapeur sont, au contraire, des quantités finies.

Soient M_1 et M_2 la masse du liquide et la masse de la vapeur, σ_1 et σ_2 le volume spécifique du liquide et le volume spécifique de la vapeur. En vertu de l'égalité (5), le potentiel thermodynamique du système aura la valeur suivante

$$\Phi = M_1[E(u_1 - Ts_1) + P\sigma_1] + M_2[E(u_2 - Ts_2) + P\sigma_2] + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2}$$

ou bien, en posant

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= E(u_1 - Ts_1) + P\sigma_1, \\ \varphi_2 &= E(u_2 - Ts_2) + P\sigma_2, \end{aligned} \right.$$

$$\Phi = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2}.$$

Supposons qu'une quantité infiniment petite du liquide passe à l'état de vapeur. M_2 augmentera de δM_2 ; M_1 diminuera de la même quantité ; Φ augmentera de

$$\begin{aligned} \delta\Phi = {} & (\varphi_2 - \varphi_1)\delta M_2 - M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 \\ & + A_{1,0}\,\delta\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\delta\theta_{1,2} + \theta_{1,0}\,\delta A_{1,0} + \theta_{1,2}\,\delta(A_{1,2} + A_{2,1}). \end{aligned}$$

Évaluons toutes les variations qui figurent au second membre en fonction de δM_2 et des paramètres qui définissent l'état du système.

Le volume spécifique du liquide, qui avait pour valeur σ_1, est devenu $\sigma_1 + \delta\sigma_1$; le volume spécifique de la vapeur, qui avait pour valeur σ_2, est devenu $\sigma_2 + \delta\sigma_2$. Soient Π_1 la pression initiale à l'intérieur du liquide, et Π_2 la pression initiale à l'intérieur de la vapeur. Nous avons vu, au Chapitre IV (égalité 18), que

$$\begin{aligned} \delta E(u_1 - Ts_1) &= -\Pi_1\,\delta\sigma_1, \\ \delta E(u_2 - Ts_2) &= -\Pi_2\,\delta\sigma_2. \end{aligned}$$

Nous pourrons donc écrire

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1 &= (P - \Pi_1)\,\delta\sigma_1, \\ \delta\varphi_2 &= (P - \Pi_2)\,\delta\sigma_2. \end{aligned}$$

Si nous comptons positivement les rayons ρ et ρ' lorsque les centres de courbure correspondants sont du côté de la surface $\theta_{1,0}$ où se trouve le liquide, nous aurons, en vertu des égalités (19) et (20),

$$\Pi_1 = P + A_{1,0}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) + \frac{1}{M_1}\left[\theta_{1,0}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}A_{1,0} + \theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}(A_{1,2} + A_{2,1})\right].$$

Mais, d'après ce que nous avons dit, les quantités $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{M_1}$ sont infiniment petites. L'égalité précédente nous donne donc

$$\Pi_1 = P.$$

Il en résulte que

$$\delta\varphi_1 = 0.$$

Il en résulte aussi que Π_1 est invariable, ce qui nous donne

$$\delta\sigma_1 = 0.$$

Soient R et R' les rayons de courbure en un point de la surface $\theta_{1,2}$, ces rayons étant comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants sont à l'intérieur de la vapeur. Nous aurons, en vertu des égalités (24) et (25),

$$\begin{aligned}\Pi_2 - \Pi_1 = (A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) &+ \frac{1}{M_2}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right]\\ &- \frac{1}{M_1}\left[\theta_{1,0}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}A_{1,0} + \theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}(A_{1,2} + A_{2,1})\right].\end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{M_1}$ est infiniment petit; de plus, $\Pi_1 = P$; nous déduisons donc de là

$$P - \Pi_2 = -(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \frac{1}{M_2}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right],$$

et

$$\delta\varphi_2 = -(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta\sigma_2 - \frac{1}{M_2}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right]\delta\sigma_2.$$

De là nous tirons

$$M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 = -\left\{M_2(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right]\right\}\delta\sigma_2.$$

Calculons maintenant

$$A_{1,0}\,\delta\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\delta\theta_{1,2}.$$

Le volume du liquide augmente de δV_1, celui de la vapeur de δV_2. Le volume limité par la surface $\theta_{1,0}$ augmente donc de $(\delta V_1 + \delta V_2)$. On a alors, d'après le théorème de M. Bertrand, que nous avons déjà invoqué,

$$\delta\theta_{1,0} = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)(\delta V_1 + \delta V_2).$$

La quantité $(\delta V_1 + \delta V_2)$ est évidemment de l'ordre de δM_2; d'autre part, la quantité $\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$ est infiniment petite. Nous pouvons donc écrire

$$\delta\theta_{1,0} = 0.$$

Le volume embrassé par la surface $\theta_{1,2}$ augmente de δV_2. Nous pouvons donc écrire

$$\delta\theta_{1,2} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2.$$

La quantité

$$A_{1,0}\,\delta\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\delta\theta_{1,2}$$

a donc pour valeur

$$(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2.$$

Calculons enfin les termes

$$\theta_{1,0}\,\delta A_{1,0} + \theta_{1,2}\,\delta(A_{1,2} + A_{2,1});$$

nous avons

$$\delta A_{1,0} = \frac{\partial A_{1,0}}{\partial \sigma_1}\,\delta\sigma_1,$$

$$\delta(A_{1,2} + A_{2,1}) = \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_1}\,\delta\sigma_1 + \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2}\,\delta\sigma_2,$$

et comme nous avons, ainsi que nous l'avons vu,

$$\delta\sigma_1 = 0,$$

nous pouvons écrire

$$\theta_{1,0}\,\delta A_{1,0} + \theta_{1,2}\,\delta(A_{1,2} + A_{2,1}) = \theta_{1,2}\,\frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2}\,\delta\sigma_2.$$

En réunissant tous les résultats obtenus et en réduisant les termes semblables, nous arrivons au résultat suivant :

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2 + (A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)(\delta V_2 - M_2\,\delta\sigma_2).$$

Remarquons maintenant que l'on peut écrire

$$V_2 = M_2\sigma_2$$

et, par conséquent,

$$\delta V_2 = M_2\,\delta\sigma_2 + \sigma_2\,\delta M_2,$$

et nous aurons

$$\delta\Phi = \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + (A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\sigma_2\right]\delta M_2. \tag{27}$$

Cette équation renferme la théorie complète de la vaporisation.

Supposons en premier lieu la surface de séparation du liquide et de la vapeur très faiblement courbée. La quantité $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ étant extrêmement petite, nous pourrons négliger le terme dans lequel elle entre comme facteur. L'équation précédente deviendra donc

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2. \tag{28}$$

Quelle est, dans le cas actuel, la signification des quantités φ_1 et φ_2? Ces quantités sont définies par les égalités (26)

$$\varphi_1 = E(u_1 - Ts_1) + P\sigma_1,$$
$$\varphi_2 = E(u_2 - Ts_2) + P\sigma_2.$$

u_1, s_1, σ_1 sont l'énergie, l'entropie, le volume spécifique de l'unité de masse du liquide, sous la pression Π_1, en supposant que le liquide n'éprouve aucun changement d'état au voisinage des surfaces terminales. De même u_2, s_2, σ_2 sont l'énergie, l'entropie, le volume de l'unité de masse de la vapeur prise sous la pression Π_2 et en supposant que son état ne subisse aucune variation auprès des surfaces terminales.

Mais nous savons déjà que $\Pi_1 = P$; de plus, nous savons que

$$P - \Pi_2 = -(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \frac{1}{M_2}\left[\vartheta_{1,2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right].$$

Or, dans le cas actuel, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{M_2}$ sont infiniment petits; nous avons donc aussi $\Pi_2 = P$.

Il en résulte que φ_1 est le potentiel de l'unité de masse du liquide supposé homogène dans toute son étendue, même au voisinage des surfaces terminales, et soumis à la pression P; φ_2 est, dans les mêmes conditions, le potentiel de l'unité de masse de la vapeur. L'égalité (28) est alors l'égalité qu'on trouve directement en négligeant les modifications qui se produisent au voisinage des surfaces terminales. Nous avons montré dans un autre travail [1] comment on pouvait en déduire la plupart des théorèmes connus sur la vaporisation.

Supposons maintenant que R et R′ soient très petits et positifs; en d'autres termes, envisageons une très petite bulle de vapeur entourée par le liquide. Soit f_2 le potentiel thermodynamique de l'unité de masse de vapeur supposée homogène jusqu'aux surfaces et soumise à la pression P. Si nous nous souvenons que

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_2} = P - \Pi_2,$$

nous pourrons écrire

$$\varphi_2 = f_2 + \int_{s_2}^{\sigma_2} (P - \Pi)\, d\sigma,$$

s_2 étant le volume spécifique de la vapeur sous la pression P et σ le volume spécifique de la vapeur sous une certaine pression Π comprise entre P et Π_2.

En intégrant par parties, nous trouvons

$$\int_{s_2}^{\sigma_2} (P - \Pi)\, d\sigma = \sigma_2 (P - \Pi_2) + \int_{P}^{\Pi_2} \sigma\, d\Pi.$$

La quantité σ est toujours positive. Soit ς une valeur de cette quantité comprise entre σ_2 et s_2. Nous pourrons écrire

$$\int_{P}^{\Pi_2} \sigma\, d\Pi = - \varsigma (P - \Pi_2),$$

---

[1] P. Duhem, *Théorie du potentiel thermodynamique* (en cours de publication).

et, par conséquent,

$$\varphi_2 = f_2 + (\sigma_2 - \varsigma)(P - \Pi_2);$$

mais

$$P - \Pi_2 = -(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1});$$

on a donc

$$(29)\quad \delta\Phi = \left[f_2 - \varphi_1 + \varsigma(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + (\varsigma - \sigma_2)\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})\right]\delta M_2.$$

Nous savons, en vertu de l'inégalité (12), que $(A_{1,2} + A_{2,1})$ est positif; il en est de même de ς et de $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; l'expression précédente ne renferme que deux quantités dont le signe est inconnu; ces deux quantités sont $(\varsigma - \sigma_2)$ et $\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{1,3})$. Mais, quel que soit le signe de ces deux quantités, il est facile de voir que

$$\varsigma(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + (\varsigma - \sigma_2)\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$$

est toujours positif. Nous pouvons, en effet, distinguer trois cas :

1° $\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est positif, Π_2 est alors supérieur à P; σ_2 est inférieur à s_2, et, comme ς est compris entre σ_2 et s_2, $\varsigma - \sigma_2$ est positif. La quantité que nous considérons est donc positive.

2° $\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est négatif, mais $\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est moindre en valeur absolue que $(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$. Dans ce cas, Π_2 est encore supérieur à P; $\varsigma - \sigma_2$ est encore positif; mais cette quantité est inférieure à ς en valeur absolue. La quantité $(\varsigma - \sigma_2)\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est donc négative, mais inférieure en valeur absolue à $\varsigma(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$. La quantité que nous considérons est donc encore positive.

3° $\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est négatif, mais $\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$ est supérieur en valeur absolue à $(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$. Dans ce cas, Π_2 est inférieur à P; $\varsigma - \sigma_2$ est une quantité négative. La quantité $(\varsigma - \sigma_2)\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2} + A_{2,1})$

est donc positive, et il en est de même de la quantité que nous considérons.

Donc, dans tous les cas, la quantité

$$\varsigma(A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+(\varsigma-\sigma_2)\frac{\theta_{1,2}}{M_2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(A_{1,2}+A_{2,1})$$

est positive.

Si la bulle de vapeur est très petite, les quantités $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{\theta_{1,2}}{M_2}$ sont toutes trois infiniment grandes. La quantité $f_2-\varphi_1$ est donc négligeable devant la précédente, et il en résulte immédiatement que $\delta\Phi$ a le signe de δM_2. Or une transformation n'est possible que si elle correspond à une valeur négative de $\delta\Phi$; donc δM_2 ne peut être que négatif. Par conséquent, lorsqu'une très petite bulle de vapeur se trouve en présence du liquide générateur, la vapeur qu'elle contient peut se condenser, mais elle ne saurait croître aux dépens du liquide environnant. Elle ne peut croître aux dépens du liquide environnant que si ses dimensions sont supérieures à une certaine limite. Cette proposition démontre l'impossibilité, pour une bulle de vapeur, de prendre naissance au sein d'un liquide, dans quelque condition que ce soit.

On a prétendu que le contact d'un solide pouvait rendre possible cette formation d'une bulle de vapeur, qui ne saurait se produire au sein même du liquide. L'expérience a depuis longtemps fait justice de cette idée. Nous allons montrer que la théorie vient confirmer, sur ce point, les résultats obtenus par l'expérience.

Nous supposerons qu'un solide, auquel nous réserverons l'indice (3), soit en contact avec le liquide par la surface $\theta_{1,3}$ et avec la vapeur par la surface $\theta_{1,2}$; en faisant usage de notations analogues à celles que nous avons adoptées dans le cas précédent, nous aurons

$$\begin{aligned}\Phi = {} & M_1[E(u_1-Ts_1)+P\sigma_1]+M_2[E(u_2-Ts_2)+P\sigma_2]+M_3[E(u_3-Ts_3)+P\sigma_3]\\ & +A_{1,0}\theta_{1,0}+(A_{1,2}+A_{2,1})\theta_{1,2}+(A_{1,3}+A_{3,1})\theta_{1,3}+(A_{2,3}+A_{3,2})\theta_{2,3}.\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi_1=E(u_1-Ts_1)+P\sigma_1,$$
$$\varphi_2=E(u_2-Ts_2)+P\sigma_2,$$
$$\varphi_3=E(u_3-Ts_3)+P\sigma_3.$$

Nous aurons

$$\Phi = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + M_3\varphi_3 + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2} + (A_{1,3} + A_{3,1})\theta_{1,3} + (A_{2,3} + A_{3,2})\theta_{2,3}.$$

Supposons qu'une certaine quantité de liquide passe à l'état de vapeur; M_2 augmente de δM_2; M_1 diminue de la même quantité; Φ augmente de

$$\begin{aligned}\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\delta M_2 + M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2 + M_3\delta\varphi_3 \\ + A_{1,0}\delta\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\delta\theta_{1,2} + (A_{1,3} + A_{3,1})\delta\theta_{1,3} + (A_{2,3} + A_{3,2})\delta\theta_{2,3} \\ + \theta_{1,0}\delta A_{1,0} + \theta_{1,2}\delta(A_{1,2} + A_{2,1}) + \theta_{1,3}\delta(A_{1,3} + A_{3,1}) + \theta_{2,3}\delta(A_{2,3} + A_{3,2}).\end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, en supposant la masse du liquide très considérable, nous aurons

$$\delta\varphi_1 = 0, \quad \delta\sigma_1 = 0, \quad \delta A_{1,0} = 0.$$

La pression supportée par le solide au point où se trouve la bulle de vapeur varie avec les dimensions de cette bulle. Mais la pression supportée par toutes les autres parties de la surface du solide, que nous pouvons supposer très grand, demeure invariable. Nous pouvons donc supposer que l'état interne du solide n'éprouve pas de variation sensible, ce qui nous donne

$$\delta\varphi_3 = 0, \quad \delta\sigma_3 = 0.$$

D'une manière générale, nous avons

$$\begin{aligned}\delta(A_{2,3} + A_{3,2}) &= \frac{\partial(A_{2,3} + A_{3,2})}{\partial\sigma_2}\delta\sigma_2 + \frac{\partial(A_{2,3} + A_{3,2})}{\partial\sigma_3}\delta\sigma_3, \\ \delta(A_{3,1} + A_{1,3}) &= \frac{\partial(A_{3,1} + A_{3,1})}{\partial\sigma_3}\delta\sigma_3 + \frac{\partial(A_{3,1} + A_{1,3})}{\partial\sigma_1}\delta\sigma_1, \\ \delta(A_{1,2} + A_{2,1}) &= \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2}\delta\sigma_2.\end{aligned}$$

En vertu des égalités

$$\delta\sigma_1 = 0, \quad \delta\sigma_3 = 0,$$

les dernières égalités deviennent

$$\begin{aligned}\delta(A_{2,3} + A_{3,2}) &= \frac{\partial(A_{2,3} + A_{3,2})}{\partial\sigma_2}\delta\sigma_2, \\ \delta(A_{3,1} + A_{1,3}) &= 0, \\ \delta(A_{1,2} + A_{2,1}) &= \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2}\delta\sigma_2.\end{aligned}$$

Supposons une déformation quelconque de la bulle. Nous aurons toujours

$$\delta\theta_{2,3} = -\delta\theta_{1,3},$$

égalité qui exprime que la surface totale du solide ne change pas.

Supposons, en outre, que la bulle augmente de volume en restant semblable à elle-même; nous aurons

$$\delta\theta_{2,3} = \frac{\theta_{2,3}}{\theta_{1,2}}\,\delta\theta_{1,2}.$$

Il nous suffit donc de calculer la quantité $\delta\theta_{1,2}$. Or on vérifie très aisément que, si l'on désigne par i l'angle de raccordement des surfaces $\theta_{1,2}$ et $\theta_{2,3}$, en prenant l'angle qui renferme le liquide à son intérieur, on trouve

$$\delta\theta_{1,2} - \delta\theta_{2,3}\cos i = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2.$$

Les diverses relations que nous avons écrites nous donnent

$$\begin{aligned}
\delta\theta_{1,0} &= 0,\\
\delta\theta_{1,2} &= \frac{\theta_{1,2}}{\theta_{1,2} - \theta_{2,3}\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2,\\
\delta\theta_{2,3} &= \frac{\theta_{2,3}}{\theta_{1,2} - \theta_{2,3}\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2,\\
\delta\theta_{3,1} &= \frac{-\theta_{2,3}}{\theta_{1,2} - \theta_{2,3}\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}
\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2 &+ \left[M_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_2} + \theta_{1,2}\frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2} + \theta_{2,3}\frac{\partial(A_{2,3} + A_{3,2})}{\partial\sigma_2}\right]\delta\sigma_2\\
&+ \left\{(A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2} + [(A_{2,3} + A_{3,2}) - (A_{1,3} + A_{3,1})]\theta_{2,3}\right\}\frac{1}{\theta_{1,2} - \theta_{2,3}\cos i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta V_2.
\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie d'une manière notable lorsqu'on remplace $\cos i$ par sa valeur

$$\cos i = \frac{(A_{1,3} + A_{3,1}) - (A_{2,3} + A_{3,2})}{A_{1,2} + A_{2,1}}.$$

En effet, on a alors

$$\frac{1}{\theta_{1,2} - \theta_{2,3}\cos i} = \frac{A_{1,2} + A_{2,1}}{\left\{(A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2} + [(A_{2,3} + A_{3,2}) - (A_{1,3} + A_{3,1})]\theta_{2,3}\right\}}$$

et, par conséquent,

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2 + \left[M_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_2} + \theta_{1,2}\frac{\partial(A_{1,2}+A_{2,1})}{\partial \sigma_2} + \theta_{2,3}\frac{\partial(A_{2,3}+A_{3,2})}{\partial \sigma_2}\right]\delta\sigma_2.$$
$$+ (A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\delta V_2.$$

Mais, d'autre part,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_2} = P - \Pi_2$$

et

$$\begin{aligned} P - \Pi_2 = &-(A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \\ &-\frac{1}{M_1}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial \sigma_1}(A_{1,2}+A_{2,1})\right] \\ &-\frac{1}{M_2}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}(A_{1,2}+A_{2,1}) + \theta_{2,3}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}(A_{2,3}+A_{3,2})\right] \\ &-\frac{1}{M_3}\left[\theta_{1,3}\frac{\partial}{\partial \sigma_3}(A_{1,3}+A_{3,1}) + \theta_{2,3}\frac{\partial}{\partial \sigma_3}(A_{2,3}+A_{3,2})\right]. \end{aligned}$$

Mais, si nous supposons le solide et le liquide très étendus, les termes

$$\frac{\theta_{1,2}}{M_1},\ \frac{\theta_{1,3}}{M_3},\ \frac{\theta_{2,3}}{M_3}$$

deviennent infiniment petits, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} P - \Pi_2 = &-(A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \\ &-\frac{1}{M_2}\left[\theta_{1,2}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}(A_{1,2}+A_{2,1}) + \theta_{2,3}\frac{\partial}{\partial \sigma_2}(A_{2,3}+A_{3,2})\right], \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2 + (A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)(\delta V_2 - M_2\,\delta\sigma_2).$$

Enfin la relation

$$V_2 = M_2\sigma_2$$

nous donne

$$\delta V_2 = M_2\,\delta\sigma_2 - \sigma_2\,\delta M_2$$

et, par conséquent,

$$\delta\Phi = \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \sigma_2(A_{1,2}+A_{2,1})\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]\delta M_2.$$

Cette égalité est identique à l'égalité (27), que nous avons obtenue dans le cas où la vapeur n'était pas en contact avec un solide. On la traitera exactement comme l'égalité (27), et l'on arrivera aux conclusions suivantes :

1° Lorsque la surface de contact du liquide et de la vapeur est très peu courbée, la présence d'un corps solide n'influe en rien sur le phénomène de la vaporisation.

2° Une très petite bulle de vapeur, adhérente à un corps solide, et en contact avec le liquide générateur, ne peut augmenter de masse; elle ne peut que se condenser. La présence d'un corps solide ne peut donc empêcher les retards d'ébullition.

La théorie de la capillarité rend donc compte de ces phénomènes en apparence exceptionnels, lorsqu'ils furent découverts, et reconnus aujourd'hui comme tout à fait généraux. Il va sans dire que l'analyse précédente s'appliquerait, moyennant de légères modifications, aux phénomènes de la sursaturation des solutions gazeuses et à la décomposition de certains composés, tels que l'acide azoteux, susceptibles de donner des produits gazeux. Nous n'insisterons pas sur ces phénomènes, dont l'analogie avec les retards d'ébullition est trop évidente.

VII. — Changements d'état (Suite). — Surfusion.

Il n'est pas possible de traiter les questions relatives à la fusion avec autant de rigueur que les questions relatives à la vaporisation. En voici la raison : la pression à l'intérieur d'une masse fluide dépend de la courbure des surfaces qui limitent cette masse, et nous savons exprimer la dépendance qui existe entre ces quantités. Au contraire, lorsqu'il s'agit des corps solides, nous ne savons pas si la forme des surfaces terminales influe sur l'état interne du corps, et, en admettant l'existence de cette influence, nous ne savons pas l'évaluer. Cette impuissance nous empêche d'appliquer aux corps solides des considérations analogues à celles que nous avons appliquées aux fluides dans le Chapitre précédent.

Mais, si nous ne pouvons donner des phénomènes de la fusion une théorie aussi complète que celle que nous avons donnée des phénomènes de la vaporisation, nous pouvons du moins en donner une

théorie approchée, en admettant, ce qui ne s'écarte probablement pas beaucoup de la vérité, que l'état interne d'un solide est le même que si ce corps était homogène jusqu'au voisinage des surfaces terminales et soumis à la pression qu'il supporte réellement.

Considérons un solide en contact avec un liquide qui peut, en se solidifiant, lui donner naissance. Réservons l'indice (1) au liquide, que nous supposerons indéfini, et l'indice (2) au solide.

Le potentiel thermodynamique du système a pour expression

$$\Phi = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\theta_{1,2},$$

φ_1 et φ_2 étant définis par les égalités

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= E(u_1 - Ts_1) + P\sigma_1,\\ \varphi_2 &= E(u_2 - Ts_2) + P\sigma_2.\end{aligned}$$

Supposons qu'une masse infiniment petite du liquide passe à l'état solide; M_2 augmentera de δM_2; M_1 diminuera d'une quantité égale; Φ augmentera de

$$\begin{aligned}\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\delta M_2 + M_1\delta\varphi_1 + M_2\delta\varphi_2\\ + A_{1,0}\delta\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\delta\theta_{1,2} + \theta_{1,0}\delta A_{1,0} + \theta_{1,2}\delta(A_{1,2} + A_{2,1}).\end{aligned}$$

Le liquide étant supposé indéfini, nous avons, comme dans le Chapitre précédent,

$$\delta\varphi_1 = 0, \quad \delta\sigma_1 = 0, \quad \delta\theta_{1,0} = 0.$$

D'autre part, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite, l'état interne du solide ne change pas. Nous avons donc

$$\delta\varphi_2 = 0, \quad \delta\sigma_2 = 0.$$

D'une manière générale,

$$\delta A_{1,0} = \frac{\partial A_{1,0}}{\partial\sigma_1}\delta\sigma_1,$$

$$\delta(A_{1,2} + A_{2,1}) = \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial(A_{1,2} + A_{2,1})}{\partial\sigma_2}\delta\sigma_2.$$

Dans le cas actuel, ces égalités deviennent

$$\begin{aligned}\delta A_{1,0} &= 0,\\ \delta(A_{1,2} + A_{2,1}) &= 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2 + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\delta\theta_{1,2}.$$

Évaluons $\theta_{1,2}$ en fonction de δM_2.

Soit α un point de la surface $\theta_{1,2}$. Supposons qu'une certaine quantité de liquide se soit congelée, en déposant sur le solide une couche dont l'épaisseur a pour valeur ε au point α. Soient R et R′ les rayons de courbure de la surface $\theta_{1,2}$ au point α, ces rayons étant comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants se trouvent du même côté que la surface $\theta_{1,2}$ que le solide. Soit $d\theta_{1,2}$ un élément de la surface $\theta_{1,2}$ pris autour du point α. Nous aurons, en vertu du théorème de M. Bertrand,

$$\delta(d\theta_{1,2}) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon\, d\theta_{1,2},$$

et, par conséquent,

$$\delta\theta_{1,2} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon\, d\theta_{1,2}.$$

le signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\theta_{1,2}$ de la surface $\theta_{1,2}$, ou du moins de la partie de cette surface sur laquelle la solidification s'est effectuée.

Supposons cette surface convexe; $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ sera positif. Si nous désignons par $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ prend aux divers points de la partie de la surface en lesquels la solidification est censée s'effectuer, nous pourrons écrire

$$\delta\theta_{1,2} = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\mathbf{S}\,\varepsilon\, d\theta_{1,2} = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\delta V_2.$$

Mais on a, en général,

$$\delta V_2 = M_2\,\delta\sigma_2 + \sigma_2\,\delta M_2,$$

égalité qui se réduit, dans le cas actuel, à

$$\delta V_2 = \sigma_2\,\delta M_2.$$

On a donc

$$(30)\qquad \delta\Phi = \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \sigma_2(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\right]\delta M_2.$$

Si la surface de séparation du solide et du liquide est très peu courbée, le terme $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ est infiniment petit, et cette égalité se réduit à l'égalité

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2,$$

de laquelle, comme nous l'avons montré dans un autre travail, on peut déduire toute la théorie de la fusion.

Si, au contraire, les courbures de la surface $\theta_{1,2}$ sont extrêmement prononcées, le signe de $\delta\Phi$ est celui de

$$\sigma_2(A_{1,2} + A_{2,1})\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\delta M_2.$$

Deux cas sont alors à considérer :

1° $A_{1,2} + A_{2,1}$ est positif; $\delta\Phi$ a alors le signe de δM_2; une très petite particule solide ne peut s'accroître aux dépens du liquide, ni *a fortiori* prendre naissance au sein du liquide;

2° $A_{1,2} + A_{2,1}$ est négatif; $\delta\Phi$ a un signe contraire à celui de δM_2; une très petite particule solide peut s'accroître aux dépens du liquide ambiant.

En général, lorsqu'on abaisse la température d'un liquide au-dessous de son point de fusion, ce liquide reste d'abord surfondu; mais, lorsque la température est devenue assez basse, il se solidifie spontanément. On explique ce fait en supposant que $A_{1,2} + A_{2,1}$, positif à la température du point de fusion, devient négatif à une plus basse température.

Si la surface du solide était concave au point où la solidification est censée s'effectuer, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ serait négatif. La solidification serait alors possible si la courbure était très prononcée en ce point. Mais cette solidification aurait pour effet de combler cette concavité, et, une fois celle-ci disparue, les raisonnements précédents deviendraient applicables.

Les raisonnements précédents supposent la particule solide terminée par une surface courbe. Ils ne s'appliquent plus à une molécule polyédrique, car l'expression de $\delta\theta_{1,2}$, donnée par le théorème de M. Bertrand, devient inexacte dans ce cas. Mais ce cas peut être traité directement.

Supposons qu'une particule solide polyédrique croisse en restant

semblable à elle-même, de telle sorte que chacune de ses dimensions soit multipliée par $1+\lambda$. Il est évident que nous aurons

$$\delta\mathcal{S}_{1,2} = 2\lambda\mathcal{S}_{1,2}, \quad \delta M_2 = 3\lambda M_2.$$

De là nous déduisons

$$\delta\Phi = \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \tfrac{2}{3}(A_{1,2} + A_{2,1})\frac{\mathcal{S}_{1,2}}{M_2}\right]\delta M_2.$$

Si la masse du corps solide est très grande, $\frac{\mathcal{S}_{1,2}}{M_2}$ est extrêmement petit, et l'égalité précédente se réduit à

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2.$$

Si, au contraire, la masse du corps solide est très petite, $\frac{\mathcal{S}_{1,2}}{M_2}$ est extrêmement grand, et l'égalité précédente se réduit à

$$\delta\Phi = \tfrac{2}{3}(A_{1,2} + A_{2,1})\frac{\mathcal{S}_{1,2}}{M_2}\,\delta M_2.$$

Des deux égalités que nous venons d'écrire, on déduit, pour les particules solides polyédriques, les conséquences que nous avons trouvées pour les particules terminées par une surface courbe.

On peut, de la même manière, rendre compte des phénomènes de sursaturation que présentent les dissolutions salines; l'indice (1) étant réservé à la dissolution, nous avons encore

$$\Phi = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + A_{1,0}\mathcal{S}_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\mathcal{S}_{1,2}.$$

La dissolution renferme une masse m de sel et une masse μ d'eau. Si nous posons

$$\Phi_1 = M_1\varphi_1,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial m} = F,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu} = G,$$

nous aurons [1]

$$\Phi_1 = mF + \mu G$$

---

[1] P. DUHEM, *Théorie du potentiel thermodynamique*. (En cours de publication.)

et, par conséquent,

$$\Phi = m\mathrm{F} + \mu\mathrm{G} + \mathrm{M}_2\varphi_2 + \mathrm{A}_{1,0}\theta_{1,0} + (\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1})\theta_{1,2}$$

et

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \mathrm{G})\,\delta\mathrm{M}_2 + \left(m\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\Pi_1} + \mu\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\Pi_1}\right)\delta\Pi_1 + \mathrm{M}_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\Pi_2}\delta\Pi_2$$
$$+ \mathrm{A}_{1,0}\delta_{1,0} + (\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1})\,\delta\theta_{1,2} + \theta_{1,0}\,\delta\mathrm{A}_{1,0} + \theta_{1,2}\,\delta(\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1}),$$

Π_1 désignant la pression à l'intérieur de la solution, et Π_2 la pression à l'intérieur du solide.

Mais, de ce que le liquide est supposé indéfini, on déduit $\Pi_1 = \mathrm{P}$, et $\delta\Pi_1 = 0$; d'autre part, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite au commencement de ce Chapitre, on a $\Pi_2 = \mathrm{P}$, et $\delta\Pi_2 = 0$. Les termes qui figurent à la première ligne de $\delta\Phi$ se réduisent donc simplement à

$$(\varphi_2 - \mathrm{F})\,\delta\mathrm{M}_2.$$

Le fluide étant supposé indéfini, on a

$$\delta\theta_{10} = 0.$$

Les quantités $\mathrm{A}_{1,0}$, $\mathrm{A}_{1,2}$, $\mathrm{A}_{2,1}$ dépendent non seulement de la pression à l'intérieur de la dissolution et de la pression à l'intérieur du solide, mais encore de la concentration $h = \frac{m}{\mu}$ de la solution. On a donc

$$\delta\mathrm{A}_{1,0} = \frac{\partial\mathrm{A}_{1,0}}{\partial\Pi_1}\delta\Pi_1 + \frac{\partial\mathrm{A}_{1,0}}{\partial h}\delta h,$$

$$\delta(\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1}) = \frac{\partial(\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1})}{\partial\Pi_1}\delta\Pi_1 + \frac{\partial(\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1})}{\partial\Pi_2}\delta\Pi_2 + \frac{\partial(\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,1})}{\partial h}\delta h.$$

Mais on a déjà

$$\delta\Pi_1 = 0, \quad \delta\Pi_2 = 0.$$

D'autre part,

$$\partial h = \frac{\partial h}{\partial m}\delta m = -\frac{\partial h}{\partial m}\delta\mathrm{M}_2$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial m} = \frac{1}{\mu}.$$

La masse de la solution étant supposée très grande, on peut négliger

cette quantité. On a donc

$$\delta A_{1,0} = 0,$$
$$\delta(A_{1,2} + A_{2,1}) = 0,$$

et, par conséquent,

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - F)\,\delta M_2 + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\delta\theta_{1,2}.$$

Cette égalité est analogue à celle que nous avons obtenue en étudiant le phénomène de la surfusion. Elle conduit donc à des conséquences entièrement analogues.

Quelle influence peut exercer sur la solidification la présence d'un solide étranger? C'est ce que nous nous proposons d'examiner en terminant cette étude.

Supposons tout d'abord le solide étranger en contact avec le liquide, avant qu'aucune solidification se soit produite. Le potentiel thermodynamique a la valeur suivante :

$$\Phi = M_1\varphi_1 + M_3\varphi_3 + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,3} + A_{3,1})\theta_{1,3}.$$

Peut-il se faire qu'au bout d'un certain temps le liquide se soit en partie congelé au contact de ce corps solide? Supposons qu'une couche d'épaisseur ε du solide que le liquide produit par sa congélation ait recouvert le corps étranger. Désignons par D_2 la densité du solide. Il est aisé de voir que le potentiel sera devenu

$$\Phi + \delta\Phi = (M_1 - \varepsilon\theta_{1,3}D_2)\varphi_1 + M_3\varphi_3 + \varepsilon\theta_{1,3}D_2\varphi_2 + A_{1,0}\theta_{1,0} + (A_{1,2} + A_{2,1})\,\theta_{1,3}.$$

Nous aurons donc

$$\delta\Phi = [(\varphi_2 - \varphi_1)D_2\varepsilon + (A_{1,2} + A_{2,1}) - (A_{1,3} + A_{3,1})]\,\theta_{1,3}.$$

Le phénomène dont il s'agit n'est possible que si $\delta\Phi$ est négatif, quelque petit que soit ε. Il sera donc impossible si l'on a

$$(A_{1,2} + A_{2,1}) - (A_{1,3} + A_{3,1}) > 0.$$

Ainsi, un corps étranger vérifiant cette inégalité ne saurait faire cesser le phénomène de la surfusion. C'est ce que l'on constate en général.

Au contraire, un corps étranger vérifiant l'inégalité

$$(A_{1,2} + A_{2,1}) - (A_{1,3} + A_{3,1}) < 0$$

jouirait de la propriété de provoquer la congélation d'une mince couche liquide, alors même que $\varphi_2 - \varphi_1$ serait positif, c'est-à-dire alors même que la température serait supérieure au point de congélation. Jamais l'expérience n'a présenté aux physiciens de semblables corps.

Entre les deux cas généraux caractérisés par les inégalités que nous venons d'écrire, il existe un cas particulier intéressant; c'est celui où l'on a

$$(31) \qquad (A_{1,2} + A_{2,1}) - (A_{1,3} + A_{3,1}) = 0.$$

Dans ce cas, on a

$$\delta\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\varepsilon\, D_2 \vartheta_{1,3} = (\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta M_2.$$

Cette égalité conduit, nous l'avons dit, aux lois de la fusion telles qu'on les énonce en général en laissant de côté le phénomène de la surfusion. Ainsi, un corps qui vérifie l'égalité (31) peut faire cesser l'état de surfusion d'un liquide.

Connaissons-nous certains cas où cette égalité (31) soit vérifiée?

Elle est tout d'abord vérifiée dans le cas où le solide (3) introduit dans le liquide est identique avec le solide (2) auquel le liquide peut donner naissance par sa congélation. Mais elle est encore vérifiée dans un autre cas extrêmement intéressant.

Soient deux corps solides caractérisés par les indices (2) et (3): désignons par π_2 et π_3 leurs poids atomiques; dans un travail précédent [1], nous avons été conduits à comparer les propriétés de ces corps dans le cas où

$$(33) \qquad \pi_3 \varphi_3 = \pi_2 \varphi_2.$$

Nous avons montré alors que, dans les mêmes conditions, ces corps avaient même volume atomique, mêmes coefficients de dilatation, même coefficient de compressibilité, mêmes chaleurs spécifiques atomiques. Nous avons vu que leurs dissolutions présentaient certaines propriétés paradoxales, que M. Rüdorff avait constatées expérimentalement, et nous avons été amenés à conclure de cet ensemble d'analogies que les deux solides qui vérifient l'égalité (33) sont *isomorphes*.

---

[1] P. Duhem, *Théorie du potentiel thermodynamique* (en cours de publication).

Cette conclusion peut s'énoncer de la manière suivante : poids atomiques égaux de corps isomorphes ont, dans les mêmes circonstances, le même potentiel thermodynamique; ou bien encore, à cause de l'égalité des volumes atomiques des corps isomorphes : volumes égaux de deux corps isomorphes ont, dans les mêmes conditions, le même potentiel thermodynamique.

Si donc, dans un système, on remplace un certain corps solide (2) par un autre corps isomorphe (3), le potentiel du système ne devra pas changer; en d'autres termes, ce potentiel ne change pas lorsqu'on remplace l'indice (2) par l'indice (3); en particulier, on aura

$$A_{1,2} + A_{2,1} = A_{1,3} + A_{3,1}.$$

Les corps isomorphes vérifient donc l'égalité (31). Par suite, on pourra faire cesser l'état de surfusion d'un corps en y jetant une parcelle d'un corps isomorphe à l'état solide.

On sait que M. Gernez a trouvé par l'expérience cette remarquable proposition. Il a montré qu'elle s'appliquait non seulement aux phénomènes de surfusion, mais encore aux phénomènes de sursaturation. Les raisonnements précédents peuvent s'appliquer textuellement aux phénomènes de sursaturation et servir à retrouver théoriquement la loi établie par M. Gernez. L'égalité (33) renferme donc toutes les propriétés qui caractérisent les corps isomorphes.

Nous n'examinerons pas plus longtemps les corrélations qui peuvent exister entre les changements d'état et les phénomènes capillaires. Toutes ces corrélations pourraient être étudiées par des raisonnements analogues à ceux que nous avons développés dans ce qui précède.

Les considérations que nous avons exposées dans ce Mémoire montrent que, grâce à la Thermodynamique, il est possible d'affranchir la théorie des phénomènes capillaires de l'hypothèse de l'attraction moléculaire; la théorie à laquelle on parvient reproduit tous les résultats obtenus par Gauss et Laplace, mais elle donne en même temps l'expression de la quantité de chaleur mise en jeu dans les phénomènes capillaires; elle permet de relier ceux-ci aux changements d'état, et, par ce nouveau rapprochement, elle explique dans tous leurs détails les phénomènes si singuliers de la surfusion, de la sursaturation et des retards d'ébullition.

L'application de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires fournit donc une nouvelle preuve de la fécondité de cette Science, et de la puissance avec laquelle elle parvient à établir des liens d'étroite parenté entre certaines parties de la Physique qui semblent, au premier abord, s'occuper de phénomènes essentiellement différents. Les corrélations qu'elle découvre ne sont pas fondées sur des hypothèses plus ou moins plausibles; elles sont des conséquences rigoureuses du principe de l'équivalence et du principe de Carnot.

Les Mémoires de sir W. Thomson, en montrant comment le principe de Carnot s'applique aux phénomènes capillaires et relie ces phénomènes aux changements d'état, ont ouvert à la théorie de la capillarité une nouvelle voie à laquelle on peut, semble-t-il, appliquer ces paroles de Lamé : « Lorsqu'une branche de la Physique mathématique est ainsi parvenue à écarter tout principe douteux, toute hypothèse restrictive, elle entre réellement dans une phase nouvelle. Et cette phase paraît définitive, car la série historique, et en même temps rationnelle, des progrès accomplis, signale une tendance constante vers l'indépendance de toute loi préconçue ».

SUR LES

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS

DE

PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. E. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Dans son *Cours d'Analyse*, p. 64, M. Hermite a remarqué que, quand on développe le radical

$$\sqrt{1 + 2\alpha x + 2\alpha' y + \beta x^2 + 2\beta' xy + \beta'' y^2}$$

suivant les puissances de x et de y, le groupe homogène des termes du second degré entre en facteur dans le groupe homogène des termes du troisième degré et des degrés plus élevés. Cette remarque a été le point de départ d'un intéressant Mémoire de M. Darboux, publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. V, p. 376-384 et 395-424), où l'auteur détermine toutes les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes pour lesquelles la différentielle totale d'ordre $n+1$ est exactement divisible par la différentielle totale d'ordre n.

Comme l'indique M. Darboux lui-même (p. 412), ces recherches sont encore susceptibles de généralisations étendues. Dans le présent travail, je me suis proposé de *trouver toutes les fonctions d'un nombre quelconque μ de variables indépendantes telles que deux différentielles totales successives aient un facteur commun*, fonction entière et homogène des différentielles dx_1, dx_2, ..., dx_μ. Il est clair que la question résolue par M. Darboux n'est qu'un cas particulier de la précédente. Je traite d'abord le cas de deux variables indépendantes; le problème est

alors susceptible d'une interprétation géométrique simple, qui conduit facilement à la solution complète. Les résultats sont ensuite étendus aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

1. Soit $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ une fonction de μ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$; la différentielle totale d'ordre n d^nf est une fonction entière et homogène d'ordre n des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_\mu$, dont les coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées d'ordre n de la fonction f. Nous dirons que cette différentielle est *irréductible* s'il est impossible de la décomposer en un produit de facteurs entiers et homogènes par rapport aux dx_i et de degré moindre. Dans le cas de deux variables indépendantes, d^nf sera toujours le produit de n facteurs linéaires en dx_1, dx_2, égaux ou inégaux. S'il y a plus de deux variables, d^nf sera en général irréductible.

Je désignerai, en général, par les lettres H et K des expressions de même forme que d^nf, c'est-à-dire des fonctions entières et homogènes des dx_i. On voit tout de suite ce qu'il faudra entendre quand on dira que d^nf est divisible par un facteur H ou que d^nf et $d^{n+1}f$ ont un facteur commun. Soit H ce facteur commun; on devra avoir

$$\left\{\begin{aligned} d^nf &= \mathrm{HK}, \\ d^{n+1}f &= \mathrm{HK}_1; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

si l'on suppose que le facteur commun H soit d'un degré déterminé, l'élimination des coefficients inconnus qui entrent dans H, K, K_1 entre les différentes équations obtenues en écrivant que les deux membres des égalités précédentes sont identiques terme à terme, quels que soient les dx_i, conduira à un certain nombre de relations algébriques entre les dérivées partielles d'ordre n de la fonction f et les dérivées partielles d'ordre $n+1$. Il s'agit, en réalité, d'intégrer ce système d'équations aux dérivées partielles; mais la marche que j'ai suivie est tout à fait différente.

Je commencerai par démontrer le lemme suivant :

LEMME. — *Étant donnée une fonction f de μ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, si d^nf contient un facteur multiple* K^m, $d\mathrm{K}$ *est divisible par* K.

Supposons que l'on ait

$$d^n f = \mathrm{HK}^m, \tag{2}$$

H et K étant des fonctions entières des dx_i, et H étant premier avec K. Désignons par H_1 et K_1 ce que deviennent H et K quand on y remplace dx_i par p_i, et posons

$$\varphi = \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^m; \tag{3}$$

H_1 et K_1 sont des fonctions entières et homogènes des p_i de degrés m_1 et m_2 respectivement, avec la condition

$$m_1 + m m_2 = n. \tag{4}$$

Pour que l'expression HK^m soit la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f, il faut et il suffit que les conditions

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial p_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial p_i} \tag{5}$$

soient identiquement satisfaites, quelles que soient les quantités p_i (*voir* le Mémoire de M. Darboux, p. 382). On aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \mathrm{K}_1^m + m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial p_k} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} \mathrm{K}_1^m &+ m \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} + m \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_k} \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \\ &+ m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} + m(m-1) \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-2} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k}; \end{aligned}$$

les conditions (5) deviennent

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{K}_1^m \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} - \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_k \, \partial p_i} \right) + m \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_i} \right) \\ &\quad + m \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_i} \right) + m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_k \, \partial p_i} \right) \\ &\qquad + m(m-1) \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-2} \left(\frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_i} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Tous les termes, sauf le dernier, contiennent en facteur K_1^{m-1}. Comme, par hypothèse, m est > 1 et que K_1 ne peut être nul, quels que soient

les p_i, il suit de là que

$$H_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_i}\frac{\partial K_1}{\partial p_k}-\frac{\partial K_1}{\partial x_k}\frac{\partial K_1}{\partial p_i}\right)$$

devra être divisible par K_1. D'autre part, nous avons supposé H premier avec K et par suite H_1 premier avec K_1; il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_i}\frac{\partial K_1}{\partial p_k}-\frac{\partial K_1}{\partial x_k}\frac{\partial K_1}{\partial p_i}=K_1\Psi_i, \tag{7}$$

Ψ_i désignant une fonction entière des p_i. Dans la formule (7), laissons fixe l'indice k et faisons successivement $i=1, 2, \ldots, \mu$; on aura une suite de relations analogues à la précédente

$$\tag{8} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial K_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_1}=K_1\Psi_1, \\ \dfrac{\partial K_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_2}=K_1\Psi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_\mu}=K_1\Psi_\mu; \end{array}\right.$$

multiplions ces formules respectivement par $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et ajoutons. Il vient, en tenant compte de ce que K_1 est une fonction homogène des p_i,

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_k}\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_1}p_1+\frac{\partial K_1}{\partial x_2}p_2+\ldots+\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}p_\mu\right)=K_1\Phi, \tag{9}$$

Φ étant une fonction entière des p_i. Nous pouvons toujours supposer que K est irréductible; alors K_1 sera premier avec $\frac{\partial K_1}{\partial p_k}$; par suite

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_1}p_1+\frac{\partial K_1}{\partial x_2}p_2+\ldots+\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}p_\mu$$

est divisible par K_1. En remplaçant p_i par dx_i, on en conclut que

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}\frac{\partial K}{\partial x_i}dx_i=dK$$

est divisible par K. C. Q. F. D.

Il est facile de voir que cela est encore vrai, alors même que K ne serait pas supposé irréductible.

Corollaire. — Si la différentielle $n^{\text{ième}}$ est exactement divisible par un facteur multiple, la différentielle $n+1^{\text{ième}}$ sera exactement divisible par le même facteur, ainsi que les différentielles d'ordre plus élevé.

Soit

$$d^n f = \mathrm{H}\,\mathrm{K}^m,$$

on aura

$$d^{n+1} f = d\mathrm{H}\,\mathrm{K}^m + m\mathrm{H}\,\mathrm{K}^{m-1} d\mathrm{K}.$$

Comme $d\mathrm{K}$ est divisible par K, d'après ce qui vient d'être démontré, $d^{n+1}f$ sera divisible par K^m; on démontrera ensuite qu'il en est de même de $d^{n+2}f$, $d^{n+3}f$, ...

De ce qui précède, résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si $d^n f$ et $d^{n+1} f$ sont divisibles par un même facteur, ce facteur divise toutes les différentielles d'ordre plus élevé.*

Pour prendre le cas général, supposons $d^n f$ décomposé en facteurs irréductibles et premiers entre eux,

$$d^n f = \mathrm{H}_1^{n_1} \mathrm{H}_2^{n_2} \ldots \mathrm{H}_\alpha^{n_\alpha},$$

et cherchons d'où peuvent provenir les facteurs communs à $d^n f$ et à $d^{n-1} f$. Nous avons, en premier lieu, tous les facteurs multiples de $d^n f$. Soit ensuite H_i un facteur simple irréductible de $d^n f$; on pourra écrire

$$d^n f = \mathrm{H}_i \mathrm{K}_i,$$

K_i étant premier avec H_i. On en déduit

$$d^{n+1} f = \mathrm{H}_i d\mathrm{K}_i + \mathrm{K}_i d\mathrm{H}_i;$$

pour que $d^{n+1} f$ soit divisible par H_i, il faut et il suffit que $d\mathrm{H}_i$ soit divisible par H_i. En résumé, les facteurs communs proviennent des facteurs multiples de $d^n f$ et des facteurs simples H_i tels que $d\mathrm{H}_i$ soit divisible par H_i. Mais tous ces facteurs diviseront aussi $d^{n+2} f$, $d^{n+3} f$, ... C. Q. F. D.

Remarque. — Si H est un facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, $d\mathrm{H}$ sera toujours divisible par H. Dans le cas de deux variables indépendantes

x et y, cette condition est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante. Supposons, pour plus de netteté, que nous ayons un facteur linéaire en dx, dy, $A\,dx + B\,dy$, tel que $dA\,dx + dB\,dy$ soit divisible par $A\,dx + B\,dy$. Il est aisé de voir que les conditions auxquelles on est conduit sont celles que l'on obtiendrait en écrivant que les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

ont un point d'inflexion en chacun de leurs points, c'est-à-dire que ces courbes forment un système de lignes droites. La remarque s'étend d'elle-même à une équation différentielle du premier ordre et de degré quelconque.

2. Laissant de côté ces généralités, je me propose maintenant de trouver toutes les fonctions f des deux variables x et y, telles que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ soient divisibles par un même facteur. Soit S la surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y); \tag{10}$$

soient x, y, z les coordonnées d'un point de cette surface et X, Y, Z les coordonnées d'un point voisin. On aura, en posant $dx = X - x$, $dy = Y - y$,

$$Z = f + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^n f}{1.2\ldots n} + \ldots, \tag{11}$$

en admettant que la fonction f est uniforme et continue dans le voisinage du couple de valeurs considérées pour les variables.

Voici quelques dénominations dont je ferai usage pour abréger. J'appellerai *paraboloïde d'ordre* $n - 1$ toute surface ayant une équation de la forme

$$z = P(x, y),$$

$P(x, y)$ étant un polynôme de degré $n - 1$. Toute droite parallèle à l'axe oz sera dite *un diamètre* de cette surface. De même j'appellerai *parabole d'ordre* $n - 1$ toute courbe plane dont l'équation en coordonnées rectilignes peut être ramenée à la forme

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \ldots + \lambda X^{n-1};$$

et toute droite parallèle à l'axe oY sera encore un diamètre. Les équations générales d'une parabole d'ordre $n-1$ ayant ses diamètres parallèles à oz seront

$$y = mx + p,$$
$$z = \alpha + \beta x + \ldots + \lambda x^{n-1}.$$

Dans ce qui suit, je supposerai toujours, à moins de mention expresse, que les diamètres des paraboles et des paraboloïdes dont il sera question sont parallèles à oz. Une parabole d'ordre zéro sera une droite parallèle au plan des xy; une parabole du premier ordre sera une ligne droite quelconque, etc.

Si, dans le développement (11), on se borne aux n premiers termes, on a l'équation d'un paraboloïde d'ordre $n-1$ osculateur à la surface au point considéré, l'ordre de contact étant $n-1$. Toutes les paraboles d'ordre $n-1$ situées sur ce paraboloïde et passant par ce point auront également avec la surface un contact d'ordre $n-1$. Mais ce contact sera d'ordre plus élevé si l'on considère les sections du paraboloïde osculateur par les plans parallèles à oz, et dont les traces sur le plan des xy sont déterminées par l'équation $d^n f = 0$, où l'on a remplacé dx par $X - x$ et dy par $Y - y$. Il y a ainsi en chaque point d'une surface n paraboles d'ordre $n-1$ ayant avec la surface un contact d'ordre n ou d'ordre plus élevé; ce sont les paraboles de cette espèce osculatrices à la surface. Ceci posé, supposons que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ soient divisibles par un facteur de la forme $A\,dx + B\,dy$; d'après le théorème démontré plus haut, toutes les différentielles d'ordre plus élevé seront divisibles par le même facteur. On peut, de plus, supposer que ce facteur ne divise pas $d^{n-1} f$. Tous les termes du développement (11) contiendront en facteur $A(X-x) + B(Y-y)$, à partir du $n+1^{\text{ième}}$; la section du paraboloïde osculateur

$$z = f + \frac{df}{1} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{1.2\ldots(n-1)}$$

par le plan parallèle à oz

$$A(X-x) + B(Y-y) = 0$$

est donc située tout entière sur la surface. On voit donc que l'existence d'un diviseur commun de $d^n f$ et de $d^{n+1} f$ signifie géométrique-

ment que *par chaque point de la surface* S *passe une parabole d'ordre* $n - 1$ *ayant* oz *pour direction diamétrale et située tout entière sur la surface*. La réciproque est évidente. Si par chaque point de la surface passe une parabole de cette espèce située sur la surface, elle fait partie en chacun de ses points des n paraboles osculatrices à la surface en ce point, et le facteur linéaire correspondant de $d^n f$ doit diviser $d^{n+1} f$ et toutes les autres différentielles.

Si $d^n f$ a un facteur multiple, deux ou plusieurs des paraboles osculatrices en chaque point seront confondues. Le lemme démontré plus haut nous prouve que, s'il en est ainsi, les paraboles osculatrices confondues sont situées sur la surface. Par chaque point de la surface passeront autant de paraboles distinctes d'ordre $n - 1$ que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont de facteurs communs linéaires et distincts. Il nous reste à montrer comment on peut distinguer géométriquement les paraboles provenant des facteurs multiples. Supposons que $d^n f$ contienne $(A\,dx + B\,dy)^p$ et ne contienne pas $(A\,dx + B\,dy)^{p+1}$. Prenons pour origine un point quelconque de la surface et pour plan des xz le plan de la parabole provenant de ce facteur multiple; dans le développement de z suivant les puissances de x et de y, y^p entrera en facteur dans le groupe homogène des termes de degré n et des degrés plus élevés, et l'on pourra écrire

$$z = P_{n-1}(x, y) + y^p \varphi(x, y),$$

P_{n-1} désignant un polynôme de degré $n - 1$ et $\varphi(x, y)$ une fonction uniforme et continue dans le voisinage des valeurs $x = y = 0$. Considérons le paraboloïde d'ordre $n - 1$ ayant pour équation

$$Z = P_{n-1}(x, y),$$

et soit

$$u = z - Z = y^p Q(x, y).$$

Toutes les dérivées partielles de la fonction u sont nulles pour $y = 0$, jusqu'à celles de l'ordre p exclusivement, c'est-à-dire que le paraboloïde et la surface ont un contact d'ordre $p - 1$ tout le long de la parabole du plan des xz. Remarquons que, si $p < n$, il y a une infinité de paraboloïdes d'ordre $n - 1$ jouissant de la même propriété; ils sont représentés par l'équation générale

$$Z = P_{n-1}(x, y) + y^p Q(x, y),$$

$Q(x, y)$ étant un polynôme de degré $n-p-1$. Inversement, il n'existe pas de paraboloïde d'ordre $n-1$ ayant avec la surface un contact d'ordre supérieur à $p-1$ tout le long de la parabole du plan des xz. Il faudrait, en effet, pour cela que l'on pût trouver un polynôme P' de degré $n-1$, tel que la différence $z - P'$ contienne en facteur une puissance de y supérieure à p; ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, $\varphi(x, y)$ ne contient pas y en facteur.

En résumé, pour évaluer l'ordre de multiplicité d'un facteur commun à deux différentielles successives, il suffit d'évaluer l'ordre maximum de contact que peut avoir un paraboloïde d'ordre $n-1$ avec la surface tout le long de la parabole située sur la surface provenant de ce facteur commun, et d'augmenter cet ordre d'une unité.

3. Occupons-nous d'abord du cas où les deux différentielles $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un facteur commun du premier degré et un seul, ce facteur ne divisant pas $d^{n-1} f$. La définition de la fonction f résulte immédiatement des considérations précédentes. La surface $z = f(x, y)$ pourra, en effet, être regardée comme engendrée par une parabole variable d'ordre $n-1$ qui se meut en se déformant d'une façon arbitraire, mais en conservant toujours ses diamètres parallèles à oz. Cette surface sera définie par les deux équations

$$(12) \qquad \begin{cases} y = tx + \varphi(t), \\ z = f(t) + x f_1(t) + \ldots + x^{n-1} f_{n-1}(t), \end{cases}$$

t désignant un paramètre variable, et $\varphi, f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ étant $n+1$ fonctions arbitraires de ce paramètre. L'équation aux dérivées partielles de ces surfaces s'obtiendra en éliminant le rapport $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations

$$d^n f = 0, \quad d^{n+1} f = 0.$$

Ceci est bien d'accord avec les résultats connus. Posons, suivant l'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3};$$

en éliminant dx et dy entre les deux équations

$$df = p\,dx + q\,dy = 0,$$
$$d^2f = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

on aura l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par une ligne droite parallèle au plan des xy. Le résultat de l'élimination est

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0,$$

qui est bien l'équation aux dérivées partielles des surfaces conoïdes. De même, en éliminant dx et dy entre les deux équations

$$d^2f = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$
$$d^3f = \alpha\,dx^3 + 3\beta\,dx^2\,dy + 3\gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3 = 0,$$

on aura l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par une droite quelconque, ou des surfaces réglées. On est conduit aux mêmes calculs que par la méthode ordinaire (HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 222).

4. Je suppose, en second lieu, que d^nf et $d^{n+1}f$ ont un facteur commun qui est la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire en dx et dy, ne divisant pas $d^{n-1}f$. La surface $z = f(x, y)$ n'admet encore qu'un seul mode de génération parabolique, mais, tout le long d'une parabole, il existe un paraboloïde d'ordre $n-1$, ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface proposée, qui peut, de cette façon, être envisagée comme enveloppe d'un paraboloïde, la courbe de contact étant une courbe plane située dans un plan parallèle à oz. L'exemple le plus simple est fourni par les surfaces développables. Pour prendre le cas général, soient

$$x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u) = 0, \tag{13}$$
$$Z = F(x, y, u) \tag{14}$$

les équations de la parabole mobile, l'équation (14) représentant un paraboloïde d'ordre $n-1$, qui a un contact d'ordre $p-1$ avec la surface lieu de cette parabole mobile. Imaginons que de l'équation (13)

on ait tiré la valeur du paramètre variable u

$$u = f_1(x, y),$$

et qu'on l'ait porté dans l'équation (14); on aura la fonction inconnue

$$(15)\qquad z = \mathrm{F}[x, y, f_1(x, y)] = f(x, y).$$

Il nous faut exprimer que tout le long de la parabole les dérivées partielles de la fonction z sont égales à celles de Z, jusqu'à celles de l'ordre $p-1$ inclusivement. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{du}{dx},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{du}{dy};$$

comme on ne peut avoir à la fois $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = 0.$$

Or $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ est, comme $\mathrm{F}(x, y, u)$, une fonction entière de x et de y de degré $n-1$; pour que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ soit nul en même temps que $x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)$, il faut et il suffit que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ soit le produit de $x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)$ par un polynôme d'ordre $n-2$. On démontrerait ensuite de proche en proche que $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathrm{F}}{\partial u^{p-1}}$ doivent être divisibles par le même facteur; il en résulte que l'on doit avoir

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = [x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)]^{p-1}\mathrm{F}_1(x, y, u),$$

$\mathrm{F}_1(x, y, u)$ désignant un polynôme de degré $n-p$ en x et y, dont les coefficients seront des fonctions arbitraires de u. La fonction inconnue sera donc définie par l'équation

$$f = \int_0^u [x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)]^{p-1}\mathrm{F}_1(x, y, u)\,du,$$

jointe à l'équation (13). Il est facile de remarquer l'analogie de cette solution avec la forme III de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 410), à laquelle elle se réduit pour $p = n$. Nous verrons plus loin une autre méthode pour vérifier ce résultat.

5. Si les différentielles $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un diviseur commun d'un degré supérieur au premier, sans que ce facteur soit une puissance parfaite d'un facteur linéaire en dx, dy, la surface $z = f(x, y)$ admettra plusieurs modes distincts de génération parabolique. Considérons une petite portion Σ de cette surface se projetant sur le plan des xy suivant une aire σ; je suppose qu'à l'intérieur de σ z est une fonction uniforme et continue de x et de y. Soient M un point de Σ et m sa projection sur le plan des xy, qui sera à l'intérieur de σ; par le point M passent deux paraboles C, C_1 situées tout entières sur la surface et dont les plans ont pour traces sur xOy deux droites P, P_1. Soient M' un point voisin de M et m' sa projection; par M' passe de même une parabole C' de la même série que C et une parabole C'_1 de la même série que C_1; si P' et P'_1 sont les traces des plans de ces paraboles sur le plan xoy, P et P'_1 se coupent en un point μ, et P' et P_1 en un point μ'. Il est clair que les points μ et μ' seront à l'intérieur de σ, pourvu que les deux points M et M' soient suffisamment rapprochés. Le point de Σ qui se projette en μ appartient donc à la fois aux deux paraboles C et C'_1 et de même le point de la surface qui se projette en μ' sera commun à C' et à C_1. Autrement dit, la portion de surface considérée pourra être engendrée d'une infinité de manières par une parabole d'ordre $n - 1$ ayant ses diamètres parallèles à oz, assujettie à rencontrer dans toutes ses positions $n + 1$ paraboles de même degré ayant aussi leurs diamètres parallèles à oz.

Considérons $n + 1$ paraboles de la même série C_1, C_2, ..., C_{n+1}, et soient

$$(16) \qquad \begin{cases} y = m_i x + p_i, \\ z = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 + \ldots + \lambda_i x^{n-1} \end{cases}$$

les équations de la parabole C_i. Soient, de plus,

$$(17) \qquad \begin{cases} y = m x + p, \\ z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1} \end{cases}$$

les équations de la parabole mobile C′. Le plan de la parabole C′ rencontre la parabole fixe C_i en un point de coordonnées x_i, y_i, z_i

$$(18)\quad x_i = \frac{p_i - p}{m - m_i},\quad y_i = \frac{mp_i - m_i p}{m - m_i},\quad z_i = \alpha_i + \beta_i x_i + \gamma_i x_i^2 + \ldots + \lambda_i x_i^{n-1}.$$

Les $n-1$ points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ devront être situés sur une même parabole d'ordre $n-1$; ce qui fournit la relation

$$(19)\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ z_{n+1} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-2} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Imaginons qu'on ait remplacé x_i et z_i par leurs expressions (18); on aura une équation de condition dont le premier membre sera une fonction entière de m et de p,

$$(19)'\qquad \Phi(m, p) = 0,$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le plan $y = mx + p$ coupe les $n+1$ paraboles fixes C_i en $n+1$ points situés sur une même parabole d'ordre $n-1$ ayant ses diamètres parallèles à oz. La condition (19)′ étant supposée remplie, la parabole correspondante sera représentée par les équations

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx + p, \\ \begin{vmatrix} z & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & x & 1 \\ z_2 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ z_{n+1} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-2} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Écartons d'abord le cas singulier où $\Phi(m, p)$ serait identiquement nul; on obtiendra l'équation de la surface engendrée par la parabole mobile en éliminant m et p entre les équations (19)′ et (20). Le résultat de l'élimination sera évidemment une fonction algébrique entière de x, y, z,

$$(21)\qquad F(x, y, z) = 0;$$

on voit donc que la portion de surface Σ appartient à une surface *algébrique*, soit que $F(x, y, z)$ soit indécomposable, soit que $F(x, y, z)$ soit le produit de plusieurs facteurs entiers en x, y, z. Dans tous les cas, si $\varphi(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface algébrique à laquelle appartient la portion de surface Σ, il suit des propriétés bien connues des fonctions analytiques que la fonction inconnue z coïncidera, pour toutes les valeurs de x et de y, avec la fonction algébrique définie par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$.

Comme $\varphi(x, y, z)$ est un facteur de $F(x, y, z)$, on peut dire, d'après la façon dont on a obtenu cette dernière équation, que par chaque point de la surface cherchée passe une parabole d'ordre $n-1$ s'appuyant sur $n+1$ paraboles voisines d'une même série. On voit de même qu'étant donnée une parabole quelconque sur la surface, par chaque point de la surface passe une parabole qui coupe la première. Le mode de génération donne encore lieu à quelques remarques importantes. Au lieu de prendre pour directrices de la parabole mobile les $n+1$ paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, on aurait pu prendre $n+1$ autres paraboles de cette série ou d'une série différente; en faisant les mêmes calculs que plus haut, on serait parvenu à une équation analogue à l'équation (21)

$$F_1(x, y, z) = 0. \tag{21$'$}$$

Les fonctions F et F_1 ne seraient pas en général identiques; mais, quel que soit le système de paraboles choisies pour directrices, F et F_1 devront toujours avoir un facteur commun $\varphi(x, y, z)$ qui, égalé à zéro, constitue la solution cherchée.

6. Il est bien aisé maintenant de découvrir la forme de ce facteur commun $\varphi(x, y, z)$. Commençons par un cas particulier très simple, celui où tous les plans des paraboles d'une même série passent par une droite fixe qui sera forcément parallèle à oz. Je suppose qu'on ait pris cette droite fixe pour axe des z et qu'on ait choisi pour directrices n paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ d'une série différente. Les équations de la parabole mobile seront

$$\begin{aligned} y &= mx, \\ z &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1}; \end{aligned}$$

de plus, si l'on se reporte aux calculs faits tout à l'heure, on voit immédiatement que α, β, ..., λ seront des fonctions rationnelles de m; l'élimination de m conduira à une équation du premier degré en z. Donc, dans ce cas, *la fonction f est une fonction rationnelle des variables x et y.*

Supposons, en second lieu, que les plans des paraboles d'une même série ne passent pas par une droite fixe. Soient

$C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, $n+1$ paraboles voisines d'une même série;
P_1, $P_2, \ldots, P_{n+1}$ les traces de leurs plans sur le plan des xy;
m l'intersection des droites P_1 et P_2;
M_1 et M_2 les points des deux paraboles C_1 et C_2 qui se projettent en m.

La parallèle en oz, menée par m, ne peut rencontrer la surface en un troisième point M' différent de M_1 et de M_2, car il serait impossible de faire passer par M' une parabole rencontrant à la fois les deux paraboles C_1 et C_2. Il n'y aurait exception que si cette parabole se décomposait en un système de droites parallèles à oz, parmi lesquelles se trouverait la droite mM_1M_2 elle-même; mais alors cette droite appartiendrait tout entière à la surface. Appelons x_0, y_0 les coordonnées du point m, z_0 et z_1 les troisièmes coordonnées des points M_1, M_2; on voit qu'au système de valeurs (x_0, y_0) pour les variables x et y ne peuvent correspondre pour z que les deux valeurs z_0 et z_1, à moins que z ne soit indéterminé, ce qui ne peut arriver que pour des systèmes de valeurs en nombre limité. Comme les plans des paraboles ne passent pas par une droite fixe, il ne peut exister d'équation de condition entre x_0 et y_0. D'ailleurs, nous savons déjà que z est une fonction algébrique de x et de y, et nous en déduisons que *la fonction inconnue est racine d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y.*

On peut se demander ce qui arrive lorsque l'équation $(19)'$ est satisfaite identiquement. Cela signifie géométriquement que tout plan parallèle à oz coupe les $n+1$ paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ en $n+1$ points situés sur une parabole d'ordre $n-1$. Écartons le cas qui vient d'être examiné, où les plans de toutes ces paraboles passent par une droite fixe; nous pourrons supposer que l'on a choisi ces paraboles de façon que leurs plans se coupent suivant $\frac{n(n+1)}{2}$ droites toutes distinctes.

Soit D la droite d'intersection des plans des deux paraboles C_1, C_2; imaginons un plan P passant par D et ne contenant aucune autre droite d'intersection. Puisque la relation $(19)'$ est satisfaite identiquement, ce plan doit contenir une parabole d'ordre $n-1$ rencontrant à la fois les paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$; cette parabole ne pourra se réduire à $n-1$ droites parallèles à oz. Il faudra donc que les paraboles C_1 et C_2 coupent la droite D en un même point; la relation $(19)'$ ne pourra donc se réduire à une identité que si les $n+1$ paraboles considérées se coupent deux à deux.

Inversement, étant données $n+1$ paraboles d'ordre $n-1$ qui se coupent deux à deux, elles déterminent un paraboloïde d'ordre $n-1$, dont la section, par un plan parallèle à oz, est une parabole d'ordre $n-1$ rencontrant à la fois les $n+1$ paraboles considérées. En effet, l'équation de ce paraboloïde contient $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires; il suffira d'en disposer de façon que la surface passe par les $\frac{(n+1)n}{2}$ points d'intersection des paraboles données deux à deux. Il est aisé de s'assurer que le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations linéaires auxquelles on est conduit est différent de zéro; si ce déterminant était nul, on pourrait, en effet, trouver une courbe de degré $n-1$ dont feraient partie $n+1$ droites, ce qui est absurde.

7. Nous avons maintenant à rechercher, parmi les surfaces dont l'équation est de la forme précédente, quelles sont celles qui admettent des sections paraboliques et à évaluer le nombre des paraboles passant par un point donné. Si la fonction cherchée est une fonction rationnelle de x et de y, on pourra l'écrire

$$z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{22}$$

P et Q étant des fonctions entières sans facteur commun. Pour que le plan $y = mx + p$ coupe la surface suivant une courbe parabolique, il faudra que $P(x, mx+p)$ soit divisible par $Q(x, mx+p)$ ou, si l'on veut, que tous les points de rencontre de la droite $y = mx + p$ avec la courbe $Q(x, y) = 0$ appartiennent aussi à la courbe $P(x, y) = 0$. De plus, si au point $x = a$, $y = b$, α points de rencontre de la droite $y = mx + p$

avec la courbe $Q = 0$ sont confondus, il devra y avoir au moins α points de rencontre de la courbe $P = 0$ avec la droite confondus en ce même point. Si la courbe $Q = 0$ ne se réduit pas à une ligne droite, il ne pourra y avoir qu'un nombre limité de droites jouissant de la propriété précédente; ce seront des cordes communes aux deux courbes $P = 0$, $Q = 0$. Pour qu'il y ait sur la surface une infinité de sections paraboliques, il faudra, par conséquent, que la courbe $Q = 0$ se réduise à une ligne droite ou que Q soit de la forme

$$Q(x, y) = (ax + by + c)^p;$$

cela posé, on voit bien aisément que les systèmes de droites répondant à la question seront formés par les faisceaux de droites passant par les points d'intersection de la droite $ax + by + c = 0$ avec la courbe $P(x, y) = 0$, pourvu que ces points soient des points multiples de cette courbe d'un ordre de multiplicité égal ou supérieur à p; $P(x, y)$ devra être de degré $n + p - 1$. En définitive, *la recherche d'une surface de la forme* (22) *admettant q séries de sections paraboliques d'ordre $n - 1$ est ramenée à la détermination d'une courbe plane d'ordre $n + p - 1$, ayant q points multiples d'ordre p situés sur une même ligne droite.*

Les trois nombres n, q, p devront vérifier l'inégalité évidente

$$qp \leqq n + p - 1 \tag{23}$$

ou

$$p \leqq \frac{n - 1}{q - 1},$$

qui fournit une limite supérieure pour le nombre entier p lorsque les deux nombres entiers q et n sont connus, et permet d'énumérer ainsi toutes les formes possibles de la solution (22).

Si l'on fait en particulier $q = n$, on aura forcément $p = 1$, et la fonction prend la forme

$$z = \frac{P(x, y)}{ax + by + c},$$

$P(x, y)$ étant une fonction entière quelconque de degré n. C'est la forme de la première solution de M. Darboux pour le cas de deux variables (*loc. cit.*, p. 408). On voit immédiatement d'où proviennent les n systèmes de sections paraboliques; si, par les n points de rencontre

de la courbe $P = 0$ avec la droite $ax + by + c = 0$, on mène des droites parallèles à oz, ces droites sont situées sur la surface, et tout plan passant par une de ces droites coupe la surface suivant une parabole.

Revenons au cas général, et supposons qu'on ait choisi p de façon que l'inégalité (23) soit satisfaite. Prenons pour axe des y la droite des points multiples et soient $y = a_1, y = a_2, \ldots, y = a_q$, les ordonnées de ces points. L'équation générale des courbes de degré $n + p - 1$ ayant ces points pour points multiples d'ordre p sera de la forme

$$\Phi^p \varphi + \Phi^{p-1} \varphi_1 x + \ldots + \Phi \varphi_{p-1} x^{p-1} + x^p \Psi = 0,$$

où l'on a posé
$$\Phi = (y - a_1)(y - a_2) \ldots (y - a_q),$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ désignant des fonctions entières de y de degré $n + p - 1 - qp, n + p - 1 - qp + q - 1, \ldots,$ et Ψ une fonction entière de x et de y de degré $n - 1$.

Si, dans l'inégalité (23), on fait $n = q = 2$, on aura forcément $p = 1$, et l'on retrouve, comme on devait s'y attendre, une surface du second degré. Si l'on fait $n = 3, q = 2$, on aura $p \leqq 2$, et la solution convenable se composera d'une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles avec la droite joignant ces deux points. Prenons encore $n = 4$; pour $q = 4$, on a une courbe du quatrième ordre quelconque; pour $q = 2$, on a, soit une courbe du sixième ordre avec deux points triples, soit une courbe du cinquième ordre avec deux points doubles. Si l'on suppose $q = 3$, l'inégalité (23) donne $p = 1$, et l'on retombe sur la solution correspondant à $q = 4$. Ceci nous montre que toutes les combinaisons possibles *a priori* ne peuvent pas être réalisées par la forme (22); autrement dit, on ne peut pas toujours trouver de surface de cette forme ayant q systèmes de sections paraboliques et q seulement. C'est là un fait général; si, dans l'inégalité (23), on prend pour q un nombre entier supérieur à $\frac{n+1}{2}$, on aura forcément $p = 1$, et, par suite, toutes ces surfaces auront n systèmes de sections paraboliques. Pour une valeur donnée de n, le nombre des valeurs admissibles pour q est égal à $n - 1$; le nombre des valeurs qui fournissent des solutions distinctes

sera, en général, beaucoup moindre : il sera au plus égal à $\frac{n}{2}$ si n est pair, et à $\frac{n+1}{2}$ si n est impair.

8. Pour terminer ce qui est relatif à ce cas, il nous reste à évaluer l'ordre de multiplicité du facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, correspondant à chaque série de sections paraboliques. Considérons un système de sections paraboliques dont les plans passent par une droite fixe et imaginons que nous ayons pris pour axe des z cette droite fixe, pour axe des y la droite passant par les points multiples de la courbe $P = 0$, et pour plan des xz le plan d'une section parabolique quelconque. L'équation de la surface pourra s'écrire

$$(22)' \qquad z = \frac{\varphi_{n+p-1} + \varphi_{n+p-2} + \ldots + \varphi_p}{x^p},$$

en groupant ensemble au numérateur les termes de même degré. D'après ce que nous avons vu plus haut, pour évaluer l'ordre de multiplicité du facteur linéaire qui correspond aux sections paraboliques par des plans passant par oz, il suffit de chercher le paraboloïde d'ordre $n-1$ qui a le contact d'ordre le plus élevé possible avec la surface tout le long d'une de ces paraboles, par exemple tout le long de la parabole du plan des xz. Soit

$$Z = P_1(x, y)$$

l'équation d'un paraboloïde d'ordre $n-1$; pour que ce paraboloïde ait un contact d'ordre m avec la surface tout le long de la parabole du plan des xz, il faut et il suffit que

$$\varphi_{n+p-1} + \varphi_{n+p-2} + \ldots + \varphi_p - x^p P_1(x, y)$$

contienne y^{m+1} en facteur. On en déduit aisément que *l'ordre de multiplicité du facteur considéré est égal à la plus petite puissance de y qui figure dans le numérateur de z dans l'expression (22)' quand on supprime tous les termes contenant une puissance de x égale ou supérieure à la $p^{\text{ième}}$.*

En particulier, si l'on suppose $p = 1$, la plus faible puissance de y, quand on supprime tous les termes en x, est égale au nombre des points

communs à la courbe $P = 0$ et à l'axe des y qui sont confondus à l'origine; ce qui est bien conforme au résultat de M. Darboux.

Il est aisé de confirmer et d'expliquer ce résultat. Imaginons que l'on prenne pour $P(x, y)$ la courbe la plus générale de son degré ayant q points multiples d'ordre p en ligne droite; la surface correspondante aura q systèmes de sections paraboliques dont chacun correspond à un facteur linéaire simple commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$. Si l'on suppose maintenant que les coefficients restés arbitraires dans l'équation de la courbe varient de telle façon que r des points multiples d'ordre p viennent se confondre en un seul, les r systèmes de sections paraboliques correspondantes deviendront identiques, et le produit des r facteurs linéaires communs se changera en la puissance $r^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire. Cela posé, dans l'équation générale écrite plus haut d'une courbe ayant q points multiples d'ordre p, supposons que les r points a_1, a_2, ..., a_r viennent se confondre à l'origine. Tous les termes contiendront en facteur soit x^p, soit y^r; ce qui nous donne bien la même conclusion que nous avions trouvée par l'autre méthode.

Nous sommes donc en mesure d'obtenir, dans chaque cas particulier, toutes les fonctions *rationnelles* telles que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ aient q facteurs linéaires communs, distincts ou confondus.

9. Je suppose maintenant que z soit racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels en x et en y. On en déduira pour z une expression de la forme

$$z = \frac{P + Q\sqrt{R}}{T}, \tag{24}$$

P, Q, R, T étant des fonctions entières des variables. Si R est le carré d'une fonction entière, on sera ramené au cas précédent; dans le cas contraire, on pourra admettre que R ne contient pas de facteurs multiples, et que P, Q, T n'ont aucun facteur commun. Pour que le plan $y = mx + p$ coupe cette surface suivant une courbe parabolique, il faut d'abord que l'équation

$$R(x, mx + p) = 0$$

n'ait que des racines d'un ordre pair de multiplicité; autrement dit, en tous les points communs à la droite $y = mx + p$ et à la courbe

$R(x, y) = 0$, un nombre pair de points de rencontre doivent être confondus. Comme il doit y avoir une infinité de droites jouissant de cette propriété, et que $R(x, y)$ n'admet pas de facteurs multiples, on ne pourra faire que deux hypothèses :

1° $R(x, y) = 0$ représente une courbe du second degré, et $y = mx + p$ une tangente à cette conique;

2° $R(x, y) = 0$ représente $2k$ droites passant par un même point et $y = mx + p$ une droite passant par le même point. Cette dernière hypothèse doit être rejetée, car il ne pourrait y avoir qu'un seul système de sections paraboliques.

Nous supposerons, par conséquent, que l'équation $R(x, y) = 0$ représente une véritable conique, et non un système de deux droites. Soit $y = mx + p$ l'équation d'une de ses tangentes et $x = a$ l'abscisse du point de contact. La section de la surface (24) se composera de deux courbes distinctes qui se projetteront sur le plan des xz, suivant le système des deux courbes

$$z = \frac{P(x, mx+p) \pm Q(x, mx+p)(x-a)}{T(x, mx+p)},$$

dont l'une devra se réduire à une courbe parabolique. Si $T(x, y)$ ne se réduit pas à une constante, on voit que toutes les racines de l'équation

$$T(x, mx+p) = 0$$

devront appartenir à l'une des équations

$$P(x, mx+p) \pm Q(x, mx+p)(x-a) = 0.$$

Cela revient à dire que la courbe représentée par l'équation $T(x, y) = 0$ devra faire partie de la courbe représentée par l'équation

$$P(x, y) \pm Q(x, y)\sqrt{R(x, y)} = 0;$$

s'il en était ainsi, le cylindre ayant pour base cette courbe et ses génératrices parallèles à oz ferait partie de la surface; mais on peut toujours supposer que, dans l'équation mise sous forme entière, on ait supprimé tout facteur commun aux coefficients de z^2 et de z et au terme constant. Il faudra donc que $T(x, y)$ se réduise à une constante. Il faudra ensuite que toute tangente à la conique $R(x, y) = 0$ coupe la courbe

$P(x, y) = 0$ en $n-1$ points seulement à distance finie et la courbe $Q(x, y) = 0$ en $n-2$ points, ce qui exige que P et Q soient respectivement de degrés $n-1$ et $n-2$. Il est évident que tout polynôme d'ordre $n-1$ est une solution du problème, puisque $d^n f = 0$ pour une pareille fonction, et que, si l'on ajoute ce polynôme à une solution, on obtient une nouvelle solution. Nous pouvons donc faire abstraction de $P(x, y)$, et la fonction cherchée sera de la forme

$$z = Q(x, y)\sqrt{R(x, y)}, \tag{25}$$

$Q(x, y)$ désignant un polynôme arbitraire de degré $n-2$ et $R(x, y)$ un polynôme du second degré qui, égalé à zéro, représente une conique indécomposable. Les seuls plans qui coupent la surface suivant des paraboles d'ordre $n-1$ sont les plans dont les traces sur le plan des xy sont tangentes à la conique $R(x, y) = 0$. Par chaque point de la surface passent donc seulement deux paraboles.

Il nous reste à évaluer l'ordre de multiplicité du facteur correspondant à ces deux modes de génération. J'emploierai pour cela la méthode dont s'est servi M. Darboux pour le cas analogue (*loc. cit.*, p. 409). Dans le polynôme $R(x, y)$, remplaçons x par $x + h\,dx$, y par $y + h\,dy$, et soit

$$R(x + h\,dx, y + h\,dy) = A + 2Bh + Ch^2;$$

on a évidemment

$$A = R(x, y), \quad B = \frac{dA}{2}, \quad C = \frac{d^2A}{2}.$$

L'équation $B^2 - AC = 0$ peut être regardée comme l'équation différentielle des tangentes à la conique $R(x, y) = 0$, et elle admet la conique elle-même comme intégrale singulière. Il suit de là que le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ ne pourra se composer que d'une puissance entière de $B^2 - AC$ ou de $dA^2 - 2A\,d^2A$.

Pour prendre le cas général, supposons que $Q(x, y)$ contienne $R(x, y)$ à la puissance $\mu - 1$, de telle sorte qu'on ait

$$z = F(x, y)\,\varphi(x, y);$$

en posant

$$\varphi(x, y) = R(x, y)^{\frac{2\mu-1}{2}},$$

$F(x, y)$ étant un polynôme de degré $n - 2\mu$ qui n'est plus divisible par $R(x, y)$, on aura

$$(A + 2Bh + Ch^2)^{-\frac{2\mu-1}{2}} = \varphi + \frac{h}{1} d\varphi + \frac{h^2}{1.2} d^2\varphi + \ldots + \frac{h^{2\mu}}{1.2\ldots 2\mu} d^{2\mu}\varphi + \ldots,$$

$$F(x + h\,dx, y + h\,dy) = F(x, y) + \frac{h}{1} dF + \ldots + \frac{h^{n-2\mu}}{1.2\ldots(n-2\mu)} d^{n-2\mu}F.$$

Toutes les différentielles $d^{2\mu}\varphi$, $d^{2\mu+1}\varphi$, ... contiennent en facteur $(B^2 - AC)^\mu$, comme l'a fait voir M. Darboux. Donc, si l'on fait le produit des deux développements, tous les coefficients à partir de celui de h^n contiendront en facteur $(B^2 - AC)^\mu$. J'ajoute que le coefficient de h^n ne contient pas de puissance de $B^2 - AC$ supérieure à celle-là. Observons pour cela que $d^{2\mu}\varphi$ est égal, à un facteur constant près, à

$$(B^2 - AC)^\mu A^{-\frac{2\mu+1}{2}}$$

ou, si l'on veut,

$$d^{2\mu}\varphi = K(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+1}{2}}.$$

D'ailleurs

$$d(dA^2 - 2A\,d^2A) = -2A\,d^3A = 0.$$

On en déduit successivement

$$d^{2\mu+1}\varphi = -K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+3}{2}} dA.$$

$$d^{2\mu+2}\varphi = K\frac{(2\mu+1)(2\mu+3)}{4}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} dA^2$$

$$- K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} d^2A,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$d^{2\mu+2}\varphi = K\frac{(2\mu+1)(2\mu+2)}{4}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} dA^2$$

$$+ K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^{\mu+1} A^{-\frac{2\mu+5}{2}}.$$

En général,

$$d^{2\mu+i}\varphi = K\frac{(2\mu+1)(2\mu+2)\ldots(2\mu+i)}{2^i}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+2i+1}{2}},$$

plus une suite de termes qui contiendront des puissances de $dA^2 - 2A\,d^2A$ d'exposant supérieur à μ. Quand on fera le produit des deux développements qui précèdent, le coefficient de $h^n(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu$ sera de la forme

$$A^{-\frac{2\mu+1}{2}-n+2\mu}\left[p_0 F\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu} + p_1\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu-1} A\,dF + \ldots + p_{n-2\mu} A^{n-2\mu} d^{n-2\mu}F + H\right],$$

$p_0, p_1, \ldots, p_{n-2\mu}$ désignant des coefficients numériques qu'il serait aisé de calculer et H une suite de termes qui contiennent tous en facteur $dA^2 - 2A\,d^2A$. Pour que d^nf fût divisible par $(dA^2 - 2A\,d^2A)^{\mu+1}$, il faudrait que

$$p_0 F\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu} + \ldots + p_{n-2\mu} A^{n-2\mu} d^{n-2\mu}F$$

fût divisible par $dA^2 - 2A\,d^2A$. De l'équation

$$dA^2 - 2A\,d^2A = 0$$

on tire

$$\frac{\frac{dA}{2}}{d^2A} = \frac{A}{dA};$$

il en résulte que

$$p_0(d^2A)^{n-2\mu}F + p_1(d^2A)^{n-2\mu-1}dA\,dF + \ldots + p_\mu(dA)^{n-2\mu}d^{n-2\mu}F$$

devra aussi être divisible par $dA^2 - 2A\,d^2A$. Imaginons maintenant que le point (x, y) se déplace sur la conique $A = 0$; on aura aussi $dA = 0$, mais $d^2A \neq 0$. Comme tous les termes de l'expression précédente, à partir du second, contiennent dA en facteur, il en résulte que l'on devrait avoir aussi $F = 0$ ou que F serait divisible par $R(x, y)$, contrairement à l'hypothèse. Donc *l'ordre de multiplicité du facteur commun à d^nf et à $d^{n+1}f$ est égal à l'exposant de $R(x, y)$ dans $Q(x, y)$ augmenté d'une unité.*

Pour que ce facteur commun soit d^nf lui-même, il faudra que $Q(x, y)$ soit une puissance parfaite de $R(x, y)$ et, par suite, que n soit pair. On retombe ainsi sur la seconde solution de M. Darboux.

10. La méthode précédente suggère un certain nombre de remarques. En premier lieu, j'ai déjà fait observer rapidement que toutes

les combinaisons imaginables dans le nombre des facteurs communs à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ ne donnaient pas lieu à des solutions distinctes. En d'autres termes, si $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont plus d'un certain nombre de facteurs communs, il arrivera, sous certaines restrictions, que $d^{n+1} f$ sera forcément divisible par $d^n f$. Reprenons l'exemple déjà considéré et supposons que l'on cherche une fonction de deux variables x et y, telle que la dérivée quatrième et la dérivée cinquième aient un facteur commun du troisième degré en dx, dy. Si ce facteur commun n'est pas le cube d'un facteur linéaire et si $d^5 f$ n'est pas divisible par $d^4 f$, la fonction inconnue ne pourra être prise que parmi les solutions de la première forme. Or, parmi les surfaces de cette espèce, nous avons vu qu'il n'en existe pas admettant seulement trois modes de génération par des paraboles du troisième degré. Donc, si $d^4 f$ et $d^5 f$ ont un facteur commun du troisième degré en dx, dy, ce facteur est le cube d'un facteur linéaire, où $d^5 f$ est divisible par $d^4 f$.

La méthode que j'ai employée pour démontrer que toute surface susceptible de plusieurs modes distincts de génération parabolique était du premier ou du second degré en z n'exige pas au fond que les paraboles des deux modes de génération soient du même degré ; elle ne repose en réalité que sur cette propriété des courbes génératrices d'être du premier degré en z. Je laisse de côté les applications qui en sont faciles.

11. Je me propose maintenant d'étendre la question aux fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. Il est commode, pour faciliter le raisonnement, d'employer certaines expressions empruntées au langage de la Géométrie. Ainsi l'ensemble des solutions d'une équation entre les $\mu + 1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sera regardé comme une surface dans un espace à $\mu + 1$ dimensions. Une courbe sera l'intersection de deux surfaces ; un plan sera une surface représentée par une équation du premier degré, un cône de sommet $z_0, x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ aura une équation homogène en $z - z_0, x_1 - x_1^0, \ldots, x_\mu - x_\mu^0$. On appellera de même *paraboloïde d'ordre $n - 1$* toute surface ayant une équation de la forme

$$z = P(x_1, x_2, \ldots, x_\mu),$$

P désignant une fonction entière des x_i de degré $n-1$; l'intersection de ce paraboloïde par un plan parallèle à oz sera une parabole d'ordre $n-1$.

Ceci posé, soit $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ une fonction satisfaisant à la question; soient $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\mu^0$ un système particulier de valeurs pour les variables x_i, telles que z soit uniforme et continue dans le voisinage de ces valeurs. On aura, en posant $x_i - x_i^0 = dx_i$,

$$z = z_0 + \frac{df}{1} + \frac{d^2f}{1.2} + \ldots + \frac{d^nf}{1.2\ldots n} + \frac{d^{n+1}f}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots. \tag{26}$$

Si toutes les différentielles à partir de d^nf sont divisibles par un facteur du premier degré, tel que

$$a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_\mu\,dx_\mu,$$

le plan

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} a_i(x_i - x_i^0) = 0$$

coupe la surface (26) et le paraboloïde

$$Z = z_0 + \frac{df}{1} + \frac{d^2f}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}f}{1.2\ldots(n-1)} \tag{27}$$

suivant la même courbe. Donc, par chaque point de la surface passe une parabole d'ordre $n-1$ située tout entière sur la surface. On verrait de même que, si ce facteur commun entre à la puissance p, la surface (26) et le paraboloïde (27) ont un contact d'ordre $p-1$ en tous leurs points communs appartenant à cette courbe; ou, ce qui revient au même, toutes les dérivées partielles de f et de Z sont égales respectivement jusqu'à celles de l'ordre p exclusivement, en chacun de ces points.

Il est aisé de déduire de là la forme la plus générale de la fonction f, lorsque d^nf et $d^{n+1}f$ ont un diviseur commun qui est linéaire par rapport aux dx_i ou qui est une puissance parfaite d'un facteur linéaire. Dans le premier cas, la fonction f s'obtiendra par l'élimination du paramètre variable u entre les deux équations

$$x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u) = 0, \tag{28}$$

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \tag{29}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \psi$ désignant des fonctions quelconques de u, et F étant un polynôme de degré $n-1$ par rapport aux x_i, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires de u. Dans le second cas, on aura

$$(30) \quad f = \int_0^u [x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u)]^{p-1} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,du,$$

F_1 étant une fonction entière des x_i de degré $n-p$ dont les coefficients sont des fonctions arbitraires de u, et la fonction u étant toujours définie par l'équation (28). On peut l'établir par un raisonnement exactement pareil à celui du n° 4; il est clair, d'ailleurs, que la première forme n'est qu'un cas particulier de la seconde.

On peut vérifier ce résultat comme il suit : désignons par dF_1, $d^2F_1, \ldots$, les différentielles totales de F_1 prises en regardant u comme une constante. En appliquant à la fonction f la règle ordinaire de différentiation sous le signe $\int$, on en déduit successivement

$$df = (p-1)\int_0^u (x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-2}(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)F_1\,du$$
$$+ \int_0^u (x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-1} dF_1\,du,$$

....,

$$d^{p-1}f = (p-1)(p-2)\ldots 2.1 \int_0^u (\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^{p-1} F_1\,du$$
$$+ \frac{p-1}{1}(p-1)(p-2)\ldots 2.\int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + \psi)(\varphi_1 dx_1 + \ldots)^{p-2} dF_1\,du$$
$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-1)(p-2)\ldots 3$$
$$\times \int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + \psi)^2(\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^{p-3} d^2F_1\,du + \ldots$$
$$+ \int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-1} d^{p-1}F_1\,du.$$

Après n différentiations successives, on aura deux sortes de termes : 1° Des termes finis dont chacun contiendra une des différentielles

totales successives de l'expression

$$(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p,$$

ou cette expression elle-même :

2° Des termes qui s'exprimeront encore au moyen d'intégrales définies, la fonction sous le signe $\int$ contenant une des différentielles $d^{n-p+1}F_1$, $d^{n-p+2}F_1$, ... Ces termes sont nuls identiquement, puisque F_1 est un polynôme de degré $n-p$.

Posons, pour abréger,

$$U = (\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p;$$

on aura

$$dU = p(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^{p-1}(\varphi'_1 dx_1 + \varphi'_2 dx_2 + \ldots + \varphi'_\mu dx_\mu)\, du.$$

Mais de l'équation (28) on déduit

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu = -(x_1\varphi'_1 + x_2\varphi'_2 + \ldots + x_\mu\varphi'_\mu + \psi')\, du;$$

ceci nous montre que dU sera divisible par U. Par suite, il en sera de même de $d^n f$ et de toutes les différentielles de f à partir de celle-là.

12. Il nous reste à traiter le cas où $d^n f$ et $d^{n+1}f$ admettent un diviseur commun non linéaire par rapport aux dx_i, sans que ce facteur soit une puissance exacte d'un facteur linéaire ; soit H ce diviseur commun. Si l'on attribue à toutes les variables x_i, sauf à deux d'entre elles, x_h et x_k, des valeurs constantes quelconques, tous les dx_i seront nuls, sauf dx_h et dx_k, et H se réduira à une fonction homogène de dx_h et dx_k, que je désignerai par H_{hk}. D'un autre côté, f deviendra une fonction f_{hk} des deux variables x_h et x_k, telle que $d^n f_{hk}$ et $d^{n+1}f_{hk}$ aient le diviseur commun H_{hk}. Comme H n'est pas par hypothèse une puissance parfaite d'une expression linéaire par rapport aux dx_i, il en sera de même en général de H_{hk} par rapport à dx_h et dx_k et la fonction f_{hk} devra, d'après ce que nous avons vu plus haut (nos 5 et 6), se réduire à une fonction rationnelle de x_h et de x_k ou vérifier une équation du second degré

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ces deux variables.

Le raisonnement serait en défaut si H_{hk} était une puissance exacte d'un facteur linéaire; mais il est aisé de faire disparaître cette difficulté. Pour fixer les idées, supposons qu'on ait seulement trois variables x_1, x_2, x_3, et soit

$$H = A\,dx_1^2 + A'\,dx_2^2 + A''\,dx_3^2 + 2B\,dx_2\,dx_3 + 2B'\,dx_3\,dx_1 + 2B''\,dx_1\,dx_2;$$

on aura

$$H_{12} = A\,dx_1^2 + A'\,dx_2^2 + 2B''\,dx_1\,dx_2.$$

Si $B''^2 - AA' = 0$, H_{12} sera un carré parfait. Géométriquement, si l'on regarde dx_1, dx_2, dx_3 comme les coordonnées d'un point, l'équation $H = 0$ représentera un cône ayant son sommet à l'origine et la condition $B''^2 - AA' = 0$ exprime que ce cône est tangent à l'un des plans de coordonnées. Mais, si le cône $H = 0$ ne se réduit pas à un plan double, c'est-à-dire si H n'est pas un carré parfait, on peut toujours, par une substitution linéaire

$$(31)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 + \gamma\, y_3, \\ x_2 = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma' y_3, \\ x_3 = \alpha'' y_1 + \beta'' y_2 + \gamma'' y_3, \end{cases}$$

prendre pour plans de coordonnées trois plans non tangents à ce cône, de sorte qu'aucune des expressions H_{12}, H_{23}, H_{13} ne soit un carré parfait. On lève de même la difficulté dans le cas général. Nous avons donc, en premier lieu, à résoudre le problème suivant :

Trouver la forme la plus générale d'une fonction de μ variables indépendantes, telle que, si l'on attribue des valeurs constantes quelconques à $\mu - 2$ de ces variables, elle devienne une fonction rationnelle des deux variables restantes ou ne renferme d'autre irrationnalité qu'un radical carré portant sur une fonction entière de ces deux variables.

Nous voyons, de plus, que, si l'on effectue sur les variables x_i une substitution linéaire de la forme

$$x_i = \sum_{k=}^{k=\mu} a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

la même propriété devra subsister par rapport aux variables y_i. On aperçoit immédiatement deux catégories de fonctions répondant à la question : ce sont les fonctions rationnelles de toutes les variables x_i et celles qui ne contiennent d'autre irrationnalité qu'un radical carré portant sur une fonction entière de ces variables. J'ajoute qu'il n'y en a pas d'autres en dehors de ces deux catégories. Pour plus de netteté, supposons qu'il n'y ait que trois variables x_1, x_2, x_3; le raisonnement est, du reste, tout à fait général. Admettons d'abord que, quand on attribue à une des variables une valeur constante quelconque, la fonction f devient une fonction rationnelle des deux autres. Alors la fonction inconnue f sera de la forme

$$f=\frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)},$$

P et Q étant les fonctions entières de x_1 et de x_2 dont les coefficients sont des fonctions de x_3. Mais, d'autre part, quand on suppose x_2 constant, f devient une fonction rationnelle de x_3; il faut donc que ces coefficients soient eux-mêmes des fonctions rationnelles de x_3 et, par suite, f sera le quotient de deux fonctions entières par rapport aux trois variables.

Si la fonction f contient un radical carré quand on fera $x_3 =$ const., elle sera de la forme

$$f=\frac{P+Q\sqrt{R}}{T},$$

P, Q, R et T étant des fonctions entières de x_1 et de x_2 dont les coefficients sont fonctions de x_3. Supposons que R contienne x_1; quand on fera en second lieu $x_2 =$ const., f ne pourra dépendre encore que d'un radical carré, ce qui exige que ces coefficients dépendent rationnellement de x_3. Une fois la proposition établie pour le cas de trois variables, on peut remonter de proche en proche au cas d'un nombre quelconque de variables.

13. Supposons d'abord que f soit de la forme $f=\frac{P+Q\sqrt{R}}{T}$, P, Q, R et T étant des fonctions entières de toutes les variables, telles que R n'est pas carré parfait et ne contient aucun facteur carré parfait, et que

P, Q, T n'ont aucun facteur commun. D'après une remarque faite plus haut, on peut supposer, en outre, que R contient toutes les variables et ne se réduit dans aucun cas à un carré parfait, quand on suppose que l'on attribue des valeurs constantes à toutes les variables, sauf deux.

Cela posé, si l'on donne à tous les x_i des valeurs constantes quelconques, sauf aux deux variables x_h et x_k, T devra se réduire à une constante (n° 9). Il en résulte que T se réduit à une constante par rapport à toutes les variables; on verrait de même que P, Q, R sont des polynômes de degrés $n-2$, n, 2 respectivement. Abstraction faite du polynôme P, on voit que la fonction sera de la forme

$$f = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\sqrt{R(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)},$$

Q étant un polynôme arbitraire de degré $n-2$ et R un polynôme du second degré. Pour trouver le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, on n'a qu'à reprendre exactement le raisonnement du n° 9. Soit

$$R(x_i + h\,dx_i) = A + 2Bh + Ch^2,$$

si $Q(x_i)$ est divisible par $[R(x_i)]^{\mu-1}$ sans l'être par $[R(x_i)]^\mu$, le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ sera

$$(B^2 - AC)^\mu.$$

14. Si f est une fonction rationnelle des variables x_i, on pourra écrire

$$f = \frac{P}{Q},$$

P et Q étant des polynômes entiers par rapport à ces variables sans aucun facteur commun. D'après ce que nous avons vu plus haut, quand on attribue des valeurs constantes quelconques à toutes les variables, sauf deux, Q deviendra une puissance parfaite d'une fonction linéaire de ces deux variables. A plus forte raison, si l'on attribue à toutes les variables, sauf une, des valeurs constantes quelconques, Q deviendra une puissance parfaite d'une fonction linéaire de cette variable. La

même propriété subsistant quand on effectue la substitution linéaire la plus générale de la forme précédente, on en conclut que Q est une puissance parfaite d'une fonction linéaire de toutes les variables

$$Q = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu + a)^p.$$

On verrait de même que P sera de degré $n + p - 1$. Par une substitution linéaire, on pourra mettre f sous la forme

$$(32) \qquad f = \frac{P}{x_1^p};$$

imaginons qu'on ait ordonné P suivant les puissances croissantes de x_1,

$$P = P_0 + x_1 P_1 + x_1^2 P_2 + \ldots + x_1^p P_p + \ldots + x_1^{n+p-1} P_{n-p+1}.$$

Voyons comment on devra prendre le polynôme P pour que $d^n f$ et $d^{n-1} f$ aient un diviseur commun d'ordre q par rapport aux différentielles. Attribuons aux variables $x_3, x_4, \ldots, x_\mu$ des valeurs constantes; l'équation $P = 0$ représente alors une courbe plane qui, d'après ce que nous avons vu, devra avoir q points multiples d'ordre p sur l'axe Ox_2. Il en résulte que $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ devront être divisibles respectivement par $R^p, R^{p-1}, \ldots, R$, R désignant une fonction entière de x_2 de degré q. On reconnaît bien aisément que R sera une fonction entière de degré q de toutes les variables $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$, de sorte que finalement la forme générale de P est la suivante :

$$(33) \qquad P = \varphi_0 R^p + \varphi_1 x_1 R^{p+1} + \ldots + x_1^{p-1} \varphi_{p-1} R + x_1^p \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\mu),$$

ψ désignant une fonction entière de degré $n - 1$.

Inversement, considérons une fonction de la forme

$$f = \varphi_0 \left(\frac{R}{u}\right)^p + \varphi_1 \left(\frac{R}{u}\right)^{p-1} + \ldots + \varphi_{p-1} \left(\frac{R}{u}\right) + \varphi_p,$$

où les φ sont des fonctions entières, R une fonction entière de degré q et u une fonction linéaire. Je dis que toutes les différentielles à partir

de $d^n f$ sont divisibles par un même diviseur, de degré q par rapport aux différentielles. [Par hypothèse, φ_i est de degré $n+p-1-q(p-i)-i$].

Posons $\pi = \frac{R}{u}$; toutes les différentielles $d^{q+1}\pi$, $d^{q+2}\pi$, ... seront divisibles par $d^q\pi$. Il en résulte que, si $d^q\pi = 0$, le développement de f, quand on remplacera x_i par $x_i + h\,dx_i$, se réduira à un polynôme de degré $n-1$ en h; donc toutes les différentielles à partir de $d^n f$ seront nulles quand on aura $d^q\pi = 0$. Comme $d^q\pi$ est en général indécomposable, toutes ces différentielles seront divisibles par $d^q\pi$. On peut aussi le voir en calculant les coefficients de h dans le développement.

En définitive, les fonctions qui répondent au problème appartiennent à trois catégories.

I. Les fonctions de la forme

$$f = \int_0^u [x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u)]^{p-1} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,du,$$

avec la condition

$$x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u) = 0,$$

F_1 désignant une fonction entière des x_i de degré $n-p$ dont les coefficients dépendent de u.

II. Les fonctions de la forme

$$f = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\sqrt{R(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)},$$

Q étant un polynôme de degré $n-2$ et R une fonction entière du second degré.

III. Les fonctions rationnelles de la forme suivante

$$f = \varphi_0\left(\frac{R}{u}\right)^p + \varphi_1\left(\frac{R}{u}\right)^{p-1} + \ldots + \varphi_{p-1}\left(\frac{R}{u}\right) + \varphi_p,$$

où φ_i est une fonction entière de degré $n+p-1-q(p-i)-i$, où R

est une fonction entière de degré q et u une fonction linéaire. Il est bien entendu qu'à chaque solution on peut ajouter un polynôme arbitraire de degré $n-1$.

On a vu plus haut comment le diviseur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ pouvait être obtenu dans chaque cas particulier.

DÉCOMPOSITION

DES

POLYNOMES ENTIERS A PLUSIEURS VARIABLES

EN ÉLÉMENTS LINÉAIRES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'intervention des valeurs particulières de x, qui annulent un polynôme entier par rapport à cette variable, permet de le décomposer complètement en facteurs du premier degré qu'annulent séparément les diverses valeurs dont il s'agit. Cette proposition est connue de temps pour ainsi dire immémorial, c'est même sur elle que roule toute l'analyse des équations entières; mais on ignore absolument ce qui peut exister de semblable pour les polynômes à plus d'une variable indépendante. Je me propose de combler cette lacune en exécutant sur ces polynômes une décomposition tout à fait analogue. Elle fournira peut-être de nouvelles ressources à leur théorie, ainsi qu'à celle des lignes et des surfaces algébriques.

2. Un polynôme entier $f(x_0, y_0, \ldots)$ de degré m aux p variables indépendantes $x_0, y_0, \ldots$ est exactement déterminé à un facteur constant près, quand on connaît $M = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p} - 1$ systèmes de valeurs particulières de variables, savoir

$$\begin{array}{lll} x_1, & y_1, & \ldots, \\ x_2, & y_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_M, & y_M, & \ldots, \end{array}$$

qui le réduisent à zéro. Effectivement, les M équations de condition

$$f(x_1, y_1, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(x_M, y_M, \ldots) = 0$$

sont linéaires et homogènes par rapport aux $M + 1$ coefficients de $f(x_0, y_0, \ldots)$ et, en les supposant, bien entendu, distinctes les unes des autres, leur résolution fournit les valeurs de ces coefficients, ou plutôt des quantités qui leur sont proportionnelles, qui, substituées dans f, donnent immédiatement

$$f(x_0, y_0, \ldots) = a\,\delta_p^{(m)},$$

si, pour abréger, on pose

$$\delta_p^{(m)} = \begin{vmatrix} x_0^m & x_0^{m-1}y_0 & \ldots & y_0^m & \ldots \\ x_1^m & x_1^{m-1}y_1 & \ldots & y_1^m & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_M^m & x_M^{m-1}y_M & \ldots & y_M^m & \ldots \end{vmatrix};$$

$\delta_p^{(m)}$ est un déterminant d'ordre $M + 1$ dont la ligne d'indice i a pour éléments les divers monômes entiers en $x_i, y_i, \ldots$, dont les degrés sont égaux ou inférieurs à m.

Pour donner aux calculs plus de régularité et d'élégance, j'introduirai une variable supplémentaire t_0 et, au lieu de $f(x_0, y_0, \ldots)$, je considérerai la fonction $F(x_0, y_0, \ldots, t_0) = t_0^m f\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \cdots\right)$, qui est homogène et de degré m, en $x_0, y_0, \ldots, t_0$. On aura de cette manière

$$F(x_0, y_0, \ldots, t_0) = A\,\Delta_p^{(m)},$$

où A est toujours une constante indéterminée et où $\Delta_p^{(m)}$ représente le déterminant d'ordre $M + 1$, dont la ligne d'indice i est formée par les monômes entiers de degrés m en $x_i, y_i, \ldots, t_i$.

Pour revenir de $\Delta_p^{(m)}$ à $\delta_p^{(m)}$, il suffira d'y poser $t_0 = t_1 = \ldots = t_M = 1$.

Il est bon de noter la signification des équations

$$\delta_p^{(m)} = 0, \quad \Delta_p^{(m)} = 0.$$

La première exprime que les $M + 1$ systèmes particuliers de valeurs

que représentent les lettres $x, y, \ldots$, affectées successivement des indices $0, 1, 2, \ldots, M$, satisfont indistinctement à une même équation entière de degré m en $x, y, \ldots$. La seconde exprime la même chose en formules homogènes.

3. Je me bornerai à l'examen complet du cas le plus simple de la question après celui de $p = 1$, sur lequel il n'y a plus rien à dire. Je supposerai donc $p = 2$, $m = 2$, d'où $M = 5$, ce qui montrera suffisamment comment les choses se passent dans tout autre cas, sans que nous entrions dans les complications d'une démonstration tout à fait générale.

Le déterminant $\Delta_2^{(2)}$ est alors du sixième ordre, et je le disposerai ainsi

$$(1) \qquad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 & y_0 z_0 & z_0 x_0 & x_0 y_0 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, en écrivant généralement, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} x_h & y_h & z_h \\ x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \end{vmatrix} = |hij|,$$

la décomposition du polynôme $\Delta_2^{(2)}$ que nous avons en vue est fournie par le théorème suivant :

Si, à l'expression

$$(2) \qquad |012|\,|054|\,|513|\,|432|$$

on ajoute celles non identiques à elle ni entre elles-mêmes prises deux à deux (les dix-huit quantités $x_0, y_0, z_0, x_1, \ldots, z_5$ étant considérées comme autant de variables indépendantes) qui s'en déduisent par toutes les permutations possibles des six indices $0, 1, 2, \ldots, 5$, chacune de ces nouvelles expressions ayant été préalablement pourvue du signe $+$ ou du signe $-$, selon que la permutation correspondante équivaut à un groupe de transpositions de deux indices en nombre pair ou impair, on reproduit précisément $4\Delta_2^{(2)}$.

I. Chaque facteur de l'expression (2) est un déterminant qui change simplement de signe quand on transpose deux indices dans le *terne* qui constitue sa notation, et l'expression elle-même n'éprouve d'autre modification qu'une multiplication par -1. On peut donc, sans l'altérer, permuter arbitrairement les indices, mais à l'*intérieur* de tels ou tels des quatre ternes de sa notation, pourvu que le nombre total des transpositions de deux indices ainsi effectuées soit un nombre pair. Il en résulte ainsi, pour l'expression considérée, un très grand nombre de notations qui sont équivalentes en réalité, bien que distinctes en apparence, et dont il importe de retenir la possibilité.

II. Chacun des indices d'un même terne de la notation (2) se retrouve encore dans un seul des trois autres ternes, accompagné de deux autres indices; le sixième indice, qui ne figure ainsi ni dans le terne considéré, ni dans cet autre, est ce que j'appellerai l'*opposé* de cet indice.

Relativement à l'expression (2), nos six indices ne s'opposent ainsi deux à deux que d'une seule manière : 0 à 3, 1 à 4 et 2 à 5. J'appellerai *caractéristique* de cette expression la notation

$$[0\,3][1\,4][2\,5] \tag{3}$$

indiquant entre ses indices cette relation combinatoire spéciale. Il faut naturellement y faire abstraction de l'ordre dans lequel deux indices opposés sont écrits dans chaque *ambe* et aussi de celui dans lequel ces trois ambes se succèdent.

Deux indices opposés ne figurent jamais simultanément dans un même terne de l'expression (2); mais deux indices non opposés quelconques se rencontrent toujours à la fois dans quelqu'un de ces quatre ternes.

III. La transposition de deux indices opposés change l'expression (2); mais, en tenant compte de l'observation (I), on aperçoit immédiatement qu'une seconde transposition de deux indices opposés dans la nouvelle expression ainsi obtenue régénère l'expression primitive (2). Il en résulte que des transpositions quelconques de deux indices opposés laissent l'expression (2) invariable ou bien la modifient, mais alors toujours de la même manière, selon qu'elles sont en nombre pair ou impair.

IV. Des transpositions d'indices opposés laissent la caractéristique invariable ; d'autre part, deux expressions analogues à (2) sont évidemment distinctes quand leurs caractéristiques sont différentes. De cette observation combinée avec la précédente (III), on conclut que toutes les permutations possibles des indices donnent à l'expression (2) des valeurs distinctes dont le nombre total est le double de celui des caractéristiques différentes, que l'on peut construire avec nos six indices.

On peut déduire chaque caractéristique de quelque permutation des nombres $0, 1, \ldots, 5$ dans laquelle on associe le premier au second, le troisième au quatrième et le cinquième au sixième; mais, comme une caractéristique donnée reste équivalente à elle-même, quand on y permute soit les trois ambes de deux indices opposés, soit les deux indices opposés dans chaque ambe, ce qui donne $(1.2.3)\times 2^3 = 48$ manières de l'écrire ; les $1.2\ldots6$ permutations des six indices fourniront quarante-huit fois la même caractéristique. Le nombre total des caractéristiques distinctes est donc $\frac{720}{48} = 15$ et celui des valeurs différentes de l'expression (2) $15.2 = 30$.

Il convient d'associer par la pensée les deux valeurs de l'expression (2) qui ont une même caractéristique : nous les dirons *opposées*.

A une caractéristique correspondent huit ternes d'indices propres *individuellement* à figurer dans quelque valeur de l'expression (2); mais, parmi les combinaisons de ces ternes associés par quatre, deux seulement peuvent fournir la notation de l'une d'elles. On passe d'une combinaison à l'autre en remplaçant chaque indice par son opposé. Comme cette substitution contient trois transpositions de deux indices, les deux valeurs correspondantes de l'expression (2) qui sont évidemment opposées sont toujours précédées de signes contraires dans la sommation à faire d'après notre énoncé.

V. Nous avons à déterminer celles des substitutions de nos six indices qui laissent l'expression (2) invariable.

Le nombre total des substitutions possibles étant $1.2\ldots6 = 720$, et l'expression (2) n'ayant que 30 valeurs distinctes (IV), le nombre des substitutions dont il s'agit est $\frac{720}{30} = 24$, et il n'y a pas à les chercher ailleurs que parmi celles qui n'altèrent pas la caractéristique.

On trouve ainsi, en décomposant ces substitutions en cycles :

A. Une substitution identique

$$(0)(1)(2)(3)(4)(5).$$

B. Trois substitutions

$$(14)(25),\ (25)(03),\ (03)(14)$$

composées chacune de deux transpositions distinctes d'indices opposés (III).

C. Six substitutions se résolvant chacune en deux transpositions déplaçant, l'une, deux indices non opposés, l'autre, leurs opposés; telles sont :

$$(12)(45),\ (15)(42),\ (02)(35),\ \ldots.$$

D. Huit substitutions composées chacune d'une permutation circulaire de trois indices, dont deux quelconques ne sont pas opposés, et de la permutation circulaire semblable des trois indices qui leur sont respectivement opposés; telles sont :

$$(012)(345),\ (021)(352),\ \ldots.$$

E. Six substitutions dont chacune contient une transposition de deux indices opposés et une permutation circulaire des quatre autres, laissant intacts les ambes qu'ils forment dans la caractéristique; par exemple,

$$(03)(1245),\ (03)(1542),\ \ldots.$$

On trouve bien ainsi les $1 + 3 + 6 + 8 + 6 = 24$ substitutions dont nous avons parlé. On notera que chacune d'elles équivaut à un groupe de transpositions dont le nombre est essentiellement pair.

VI. Chaque terme de l'un quelconque des quatre déterminants du troisième ordre servant de facteurs à l'expression (2) est le produit de trois quantités qui se notent par les lettres x, y, z, affectées respectivement de trois indices différents. Comme un même indice quelconque se retrouve précisément deux fois dans la notation de cette expression, chaque terme de son développement qui est le produit de quatre termes empruntés respectivement au développement des quatre déter-

minants est évidemment le produit de six éléments du déterminant (1) appartenant aux six lignes de son tableau.

De ces termes, les uns contiennent comme facteurs deux éléments du déterminant (1) ou plus, appartenant à une même colonne de son tableau. Il est évident qu'ils se détruisent les uns les autres dans la sommation des valeurs distinctes de l'expression (2) que nous affectons de signes alternés. Effectivement, chacun d'eux reste invariable quand on y transpose les indices de deux de ses facteurs appartenant ainsi à une même colonne du déterminant (1). Il y en a donc un semblable dans le développement de celle des valeurs de l'expression (2) qui en nait par la transposition, dans sa notation, des deux indices considérés. Et la destruction de ces deux termes résulte de ce que la règle formulée dans notre énoncé impose le signe — à cette seconde valeur de l'expression (2).

Il résulte de cette observation que, dans la sommation des développements des valeurs distinctes de l'expression (2), qu'il faut pourvoir de signes alternés, il y a seulement à considérer les termes ayant pour facteurs six éléments du déterminant (1) tombant respectivement dans ses six colonnes, c'est-à-dire ceux qui sont semblables aux termes mêmes de ce déterminant. Pour faciliter le langage, je les nommerai les termes *utiles* du développement de l'expression (2) et de ses autres valeurs.

VII. On obtient au signe près un terme du développement de l'expression (2) en écrivant successivement et dans le même ordre les douze indices de sa notation, puis, au-dessus des quatre ternes qu'ils forment, quatre permutations quelconques (distinctes ou non) des trois lettres x, y, z, affectant ensuite chaque lettre de l'indice qu'elle surmonte, puis finalement en formant le produit des douze quantités dont les notations ont été ainsi construites simultanément. J'appellerai le signe ainsi constitué le *schéma* de terme considéré.

Inversement, il est clair que tout terme de ce développement peut être obtenu à l'aide d'un pareil procédé. Quant au signe à lui donner, il suffira, pour le découvrir, de compter le nombre total de transpositions de deux lettres qu'il faut exécuter à l'*intérieur* de chacun des quatre ternes de son schéma (les indices restant, bien entendu, immobiles) pour ramener ces douze lettres à se présenter successivement

dans l'ordre $xyz\,xyz\,xyz\,xyz$; le signe en question sera $+$ si ce nombre de transpositions est pair, $-$ s'il est impair.

Un terme utile du développement de l'expression (2) est le produit des six facteurs quadratiques dont on obtient les notations en affectant convenablement des six indices $0, 1, \ldots, 5$ les monômes x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy. Il est évident que ce développement ne peut contenir d'autres termes utiles que ceux dont les facteurs carrés sont affectés d'indices figurant tous trois simultanément dans quelqu'un des quatre ternes de la notation (2).

Parmi ces termes utiles, nous appellerons *réguliers* ceux où les monômes x^2 et yz sont affectés d'indices opposés, ainsi que y^2 et zx, z^2 et xy. Tous ces termes existent, et une fois seulement chacun, dans le développement de l'expression (2); car, l'un d'eux étant donné, il faut, de toute nécessité, pour construire son schéma, écrire x, y, z dans un ordre convenable au-dessus du terne des indices des facteurs carrés, les répéter ensuite dans les trois autres ternes au-dessus des mêmes indices, puis enfin, dans chacun de ces trois ternes, permuter au-dessus de ses deux indices encore dépourvus de lettres celles qui surmontent leurs opposés dans le premier terne.

C'est ainsi que l'on obtient le schéma

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

du terme régulier

$$x_0^2 y_1^{\vphantom{2}} z_2^2 (y_3 z_3)(z_4 x_4)(x_5 z_5), \tag{5}$$

dans les facteurs carrés duquel les lettres x, y, z sont affectées des indices du terne $|0\ 1\ 2|$, et aussi

$$\begin{vmatrix} z & x & y \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z & x & y \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & x & z \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

schéma du terme régulier où, dans les facteurs carrés, les mêmes lettres portent les indices 5, 4, 0.

Il est évident qu'en exécutant sur les indices du schéma d'un terme régulier (les lettres restant immobiles) l'une des substitutions qui

laissent l'expression (2) invariable (V), on obtient encore celui d'un terme régulier, et, d'autre part, qu'une substitution de cette espèce, convenablement choisie, permettra toujours de transformer l'un dans l'autre les schémas de deux termes réguliers pris à volonté dans le développement de l'expression (2).

On en conclut que le nombre des termes réguliers de ce développement est précisément égal à celui des substitutions dont il s'agit, c'est-à-dire à vingt-quatre. Il serait facile de s'en assurer directement.

VIII. Le développement de l'expression (2) contient encore, avec chacun de ses termes réguliers, trois termes utiles *irréguliers* que nous appellerons ses *compagnons;* ce sont ceux dont la notation se déduit de celle du terme régulier en question par une transposition de deux indices, affectant des facteurs quadratiques non carrés parfaits.

Par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_3 z_3)(z_5 x_5)(x_4 y_4), \\ x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_5 z_5)(z_4 x_4)(x_3 y_3), \\ x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_4 z_4)(z_3 x_3)(x_5 z_5) \end{array}\right. \tag{6}$$

sont les compagnons du terme régulier (5).

Il est facile de déduire du schéma d'un terme régulier donné celui de tel ou tel de ses compagnons. Il suffit effectivement de chercher, dans ce compagnon, le facteur quadratique non carré dont l'indice est le même que dans le terme régulier, de prendre le facteur carré qui porte l'indice opposé, puis, dans celui des ternes du schéma du même terme régulier qui contient simultanément les indices opposés à ceux des deux autres facteurs carrés, de transposer les lettres surmontant ces indices.

L'application de cette règle au schéma (4) du terme régulier (5) fournit bien celui du premier de ses compagnons (6), qui est

$$\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} x & z & y \\ 0 & 5 & 4 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 5 & 1 & 3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right|.$$

Il est évident que le développement de l'expression (2) ne contient d'autres termes utiles que les 24 réguliers ci-dessus considérés (VII), et leurs $24 . 3 = 72$ compagnons irréguliers, soit, au total, 96 termes utiles.

IX. Dans le développement de l'expression (2), les termes utiles sont précédés des mêmes signes que dans celui du déterminant (1).

Considérons en premier lieu les termes réguliers. Il est clair que deux quelconques sont précédés d'un même signe dans le développement de l'expression (2), puisqu'on passe du schéma de l'un au schéma de l'autre par une substitution d'indices qui ne change pas cette expression (VII). Ils sont aussi précédés d'un même signe dans le développement du déterminant (1), parce qu'une substitution de cette espèce équivaut essentiellement à un nombre pair de transpositions (V). Mais ces deux signes sont identiques : effectivement, le terme régulier (5), auquel son schéma (4) assigne le signe + dans le développement de l'expression (2) (VII) a aussi le signe + dans le développement du déterminant (1), parce qu'il en est le terme principal.

Considérons, en second lieu, les termes irréguliers. Chacun d'eux a le signe — dans le développement de l'expression (2), parce que le terme régulier dont il est le compagnon y a le signe + et que le schéma du terme irrégulier se déduit de celui du terme régulier par une (nombre impair) transposition de deux lettres au-dessus d'un seul terne (VIII) (VII). Or, il a le même signe — dans le développement du déterminant (1), parce que sa notation se déduit aussi par une (nombre impair) transposition d'indices, de celle du même terme régulier que nous savons y être précédée du signe +.

X. Dans le développement de toute autre valeur de l'expression (2), les termes utiles sont aussi précédés des signes qu'ils ont dans celui du déterminant (1). En effet, la substitution d'indices qui change l'expression (2) en celle dont il s'agit laisse évidemment utiles les termes qui l'étaient avant elle ; en outre, la règle posée dans notre énoncé pour la sommation des diverses valeurs de cette expression conserve à ces termes leurs anciens signes, ou bien les change, selon que cette substitution équivaut à un nombre pair ou impair de transpositions. Comme les choses se passent de même dans le développement de (1) à cause de la loi fondamentale de formation des déterminants, il est clair que la correspondance de signes des termes utiles que nous avons constatée ci-dessus (IX) est nécessairement conservée par la substitution considérée.

XI. Ainsi, dans la sommation prescrite par notre énoncé, les termes

qui ne se détruisent pas sont individuellement identiques à ceux du déterminant (1), et il est évident que chacun d'eux s'y répète le même nombre de fois.

La somme en question comprenant 30 expressions analogues à (2) (IV) dont chacune possède 96 termes utiles, en contient par suite $96 \times 30 = 2880$. Le déterminant (1) en contient, lui, $1.2\ldots6 = 720$. Le nombre de ces répétitions est donc $\frac{2880}{720} = 4$, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

On peut, au surplus, retrouver ce nombre 4 d'une autre manière, en cherchant combien de valeurs de l'expression (2) contiennent dans leurs développements, soit comme régulier, soit comme irrégulier, un terme donné du déterminant (1).

4. L'induction permet d'étendre le théorème à toutes les valeurs des entiers p, m. Par exemple, pour $p = 2$, $m = 3$, la décomposition de $\Delta_2^{(3)}$ s'obtient, sauf un facteur numérique, en sommant les valeurs distinctes de l'expression

$$(7) \qquad |0\,1\,2|.|0\,5\,4|.|5\,1\,3|.|4\,3\,2|.|0\,6\,7|.|1\,6\,8|.|2\,6\,9|.|3\,7\,8|.|4\,7\,9|.|5\,8\,9|$$

précédées chacune du signe $+$ ou du signe $-$, selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions dont l'ensemble équivaut à la substitution d'indices dont elle dérive.

En posant encore

$$\begin{vmatrix} x_h & y_h & z_h & t_h \\ x_i & y_i & z_i & t_i \\ x_j & y_j & z_j & t_j \\ x_k & y_k & z_k & t_k \end{vmatrix} = |h\,i\,j\,k|,$$

la décomposition de $\Delta_3^{(2)}$ résulte, à quelque facteur numérique près, de la sommation faite en suivant la même règle pour l'attribution des signes, des valeurs distinctes de

$$|0\,1\,2\,3|.|0\,4\,5\,6|.|1\,4\,9\,8|.|2\,9\,5\,7|.|3\,8\,7\,6|.$$

Les éléments ultimes d'une pareille décomposition sont des déterminants d'ordre $p+1$, parmi lesquels ceux dont la notation contient

l'indice o sont seuls variables. Il est clair que chacun de ces derniers est une simple fonction linéaire des variables, qui s'annule pour quelques-uns des systèmes de valeurs annulant la fonction considérée que l'on a fait servir à l'opération.

5. Cette décomposition de la forme quelconque $F(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ en éléments linéaires est l'équivalent, avons-nous dit, de celle d'une forme binaire en facteurs (que l'on réaliserait, d'ailleurs, à l'aide du même mécanisme). Pour les formes binaires, ces facteurs sont des déterminants du second ordre; pour les autres, les éléments linéaires sont des déterminants d'ordre commun égal au nombre des variables. Ce fait est conforme aux analogies que fournit la Géométrie : les éléments des espaces rectilinéaire, plan, solide sont les segments rectilignes, les triangles, les tétraèdres, qui, en coordonnées rectilignes, correspondent à des déterminants d'ordres 2, 3, 4.

La seule différence entre les formes binaires et les autres, au point de vue de leur décomposition en éléments linéaires, est qu'elle est possible d'une infinité de manières pour celles-ci, tandis qu'elle ne l'est que d'une seule pour les premières. En outre, les éléments se multiplient mutuellement pour les premières, alors que pour les autres ils se combinent par voie et de multiplication et d'addition. Mais, à certains égards, une pareille combinaison peut être considérée comme l'extension de la multiplication à des assemblages de quantités.

L'analogie ne s'arrête pas là. Appelons, pour un instant, un déterminant tel que $\Delta_p^{(m)}$ le *solidarisant* des $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}$ systèmes de valeurs des variables figurant dans ses diverses lignes, pour rappeler la propriété de l'équation obtenue en l'égalant à zéro, que ces systèmes annulent tous une même forme de degré m à p variables ; les éléments linéaires dans lesquels nous avons décomposé la forme sont précisément les solidarisants de ces systèmes associés $p+1$ à $p+1$. Mais, dans le résultat de la décomposition, on peut aussi mettre en évidence les solidarisants de ces systèmes associés en groupes de $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p)}{1.2\ldots p}$, μ étant un entier quelconque inférieur à p. Par exemple, si l'on somme seulement les valeurs de l'expression (7), dont la formation ne comporte que des permutations dans le groupe

(0 1 2 3 4 5) avec d'autres intéressant l'autre groupe (6 7 8 9), on en obtient une partie qui est exactement divisible par le solidarisant des $\frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{1.2.3} = 6$ premiers systèmes.

Ces autres décompositions de $\Delta_p^{(m)}$ correspondent tout à fait à l'opération consistant à concevoir un produit ordinaire de plusieurs facteurs comme résultant de la multiplication du produit effectué de quelques-uns d'entre eux par le produit des autres.

6. Nous avons résolu en éléments linéaires la forme F de degré m à $p+1$ variables au moyen de $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p} - 1$ des systèmes *distincts* de valeurs de variables qui l'annulent. Mais on peut en faire intervenir un nombre moindre, s'il arrive que quelques-uns sont *multiples*, c'est-à-dire annulent simultanément toutes les dérivées partielles de la forme jusqu'à un certain ordre.

Supposons, par exemple, que le système d'indice i annule les $K = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{1.2\ldots p}$ dérivées partielles d'ordre k de F (et par suite aussi celles d'ordres moindres). On pourra remplacer par ce système unique de multiplicité K, K systèmes simples dont les indices seront, par exemple, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Alors il faudra, dans $\Delta_p^{(m)}$, substituer aux lignes d'indices $\alpha, \ldots, \lambda$ ce que devient la ligne $x^m, x^{m-1}, y, \ldots, t^m$, quand on différentie simultanément tous ses éléments de K manières dont il s'agit, et qu'ensuite on y fait $x = x_i$, $y = y_i$, $\ldots$, $t = t_i$. Cela revient à différentier des K manières en question les K lignes d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ respectivement, et à y poser ensuite

$$x_\alpha = x_\beta = \ldots = x_i, \quad y_\alpha = y_\beta = \ldots = y_i, \quad t_\alpha = t_\beta = \ldots = t_i.$$

Cette dernière opération, exécutée sur le résultat de la décomposition en éléments linéaires de $\Delta_p^{(m)}$ contenant encore les lignes distinctes d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, donnera pour F une décomposition dans laquelle un certain nombre d'éléments linéaires seront égaux entre eux et où, par suite, ils figureront à des degrés supérieurs au premier. C'est exactement ce qui se passe pour les formes binaires qui ont des facteurs multiples.

7. Je termine en donnant le développement de $4\Delta_2^{(2)}$ en ses 30 *ar-*

ticles. Pour plus de clarté, j'ai disposé sur quinze lignes différentes les quinze paires d'articles opposés (3, IV) en inscrivant en regard la caractéristique de chaque paire; et, pour faciliter l'impression, j'ai séparé par de simples points les ternes d'indices dans les articles et leurs ambes dans les caractéristiques.

On trouve

$$(8)\qquad 4\Delta_2^{(2)} = \left\{\begin{array}{ll}
+\,034.052.531.214 - 125.143.420.305 & 01.23.45 \\
+\,125.134.320.405 - 043.052.541.213 & 01.24.35 \\
+\,123.145.420.503 - 045.032.351.214 & 01.25.43 \\
+\,215.243.410.305 - 034.051.532.124 & 02.13.45 \\
+\,043.051.542.123 - 215.234.310.405 & 02.14.35 \\
+\,054.031.352.124 - 213.245.410.503 & 02.15.43 \\
+\,325.341.420.105 - 014.052.513.234 & 03.21.45 \\
+\,041.052.543.231 - 325.314.120.405 & 03.24.15 \\
+\,054.012.153.234 - 321.345.420.501 & 03.25.41 \\
+\,425.413.120.305 - 031.052.534.241 & 04.23.15 \\
+\,013.052.514.241 - 425.431.320.105 & 04.21.35 \\
+\,051.032.354.241 - 423.415.120.503 & 04.25.13 \\
+\,521.543.420.301 - 034.012.135.254 & 05.23.41 \\
+\,043.012.145.253 - 521.534.320.401 & 05.24.31 \\
+\,014.032.315.254 - 523.541.420.103 & 05.21.43
\end{array}\right.$$

L'équation $\Delta_2^{(2)} = 0$ représente la conique dont les points ont x_0, y_0, z_0 pour coordonnées courantes et qui passe par les cinq points qui ont pour coordonnées les mêmes lettres affectées des indices 1, 2, 3, 4, 5. En substituant à $\Delta_2^{(2)}$ le second membre de la formule (8), elle prend une forme sous laquelle elle exprime une relation spéciale entre les aires des triangles dont chacun a pour sommets une certaine combinaison de trois points du groupe formé par ces cinq et un quelconque de la courbe. L'aire d'un triangle est un *segment* du plan comme une longueur est un segment de droite. A ce titre, la relation dont il s'agit est comparable à la relation segmentaire exprimant qu'un point d'une droite fait partie d'un groupe de deux points donnés sur elle.

SUR UNE APPLICATION
DE LA THÉORIE
DES
FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES
DE SECONDE ESPÈCE,

Par M. HERMITE.

On doit à Jacobi les développements en séries de sinus et de cosinus des expressions suivantes :

$$\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H(x+a)}{\Theta(x)}, \quad \frac{\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H_1(x+a)}{\Theta(x)},$$

qui se sont offertes dans ses recherches mémorables sur le mouvement de rotation autour d'un point fixe d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Ces résultats découverts par le grand géomètre m'ont paru devoir être complétés en considérant le système complet des seize quotients qui ont pour numérateurs

$$\Theta(x+a), \; H(x+a), \; \Theta_1(x+a), \; H_1(x+a)$$

et pour dénominateurs

$$\Theta(x), \; H(x), \; \Theta_1(x), \; H_1(x).$$

Les quantités qu'on obtient ainsi appartiennent à la catégorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant un seul pôle dans le rectangle des périodes $2K$, $2iK$, et elles offrent ce caractère particulier, que l'un des multiplicateurs, celui qui correspond à la période $2K$, est égal à ± 1.

C'est au point de vue de la théorie des fonctions doublement pério-

diques de seconde espèce que je me placerai dans ce qui va suivre, en me proposant de faire voir comment elle permet de démontrer facilement les formules de Jacobi et celles que j'y ai ajoutées.

I.

Considérons en premier la série

$$\sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')},$$

où le nombre entier n prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, a étant une constante qui sera représentée par $\alpha + i\alpha'$; je dis qu'elle est convergente, quel que soit x, pourvu que α' soit en valeur absolue inférieur à $2K'$.

En effet, le terme général étant mis sous la forme

$$\frac{2ie^{\frac{ni\pi a}{K}}}{e^{\frac{i\pi}{K}(x+2niK')} - e^{-\frac{i\pi}{K}(x+2niK')}},$$

on pourra, au dénominateur, négliger la première exponentielle ou la seconde, suivant que n croît positivement ou négativement, ce qui donne les quantités

$$-2ie^{\frac{ni\pi}{K}(a+2iK')+\frac{i\pi x}{2K}},\quad 2ie^{\frac{ni\pi}{K}(a-2iK')-\frac{i\pi x}{2K}}.$$

Écrivons $-n$ au lieu de n dans la seconde et prenons la limite pour n infiniment grand de la racine $n^{\text{ième}}$ des modules, on aura pour résultat, si l'on remplace a par $\alpha + i\alpha'$,

$$e^{-\frac{\pi}{K}(\alpha'+2K')},\quad e^{\frac{\pi}{K}(\alpha'-2K')}.$$

Ces deux limites seront donc inférieures à l'unité en posant

$$\alpha'+2K'>0,\quad \alpha'-2K'<0,$$

et la série sera convergente, comme nous l'avons dit, quand la valeur absolue de α' sera moindre que $2K'$.

Soit maintenant

$$\Phi(x) = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2niK')};$$

j'observe que, l'indice n variant de $-\infty$ à $+\infty$, on peut changer n en $n+1$ et écrire

$$\Phi(x) = \sum \frac{e^{\frac{(n+1)i\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}[x + 2(n+1)iK']} = e^{\frac{i\pi a}{K}} \sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2iK' + 2niK')}.$$

De la composition même de la série résulte donc la relation

$$\Phi(x) = e^{\frac{i\pi a}{K}} \Phi(x + 2iK'),$$

ou bien

$$\Phi(x + 2iK') = e^{-\frac{i\pi a}{K}} \Phi(x).$$

On a d'ailleurs immédiatement

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x);$$

ainsi $\Phi(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce aux multiplicateurs -1 et $e^{-\frac{i\pi a}{K}}$; ses pôles s'obtiennent en posant

$$\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2niK') = 0,$$

d'où

$$x = 2mK - 2niK',$$

m désignant un entier arbitraire; par conséquent, on n'a à l'intérieur du rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$ que le seul pôle $x = 0$, auquel correspond le résidu $\frac{2K}{\pi}$. Les propriétés que nous venons de reconnaître suffisent à la complète détermination de la fonction $\Phi(x)$, et l'on sait construire avec les transcendantes de Jacobi une expression qui les

réunisse : c'est la quantité

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)},$$

qui a, en effet, les mêmes multiplicateurs et le même pôle $x = 0$ avec le résidu $\frac{2K}{\pi}$; on a, par suite, la relation

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')},$$

et il suffit de permuter x et a pour en conclure l'une des formules de Jacobi, à savoir

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)} = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+2niK')}.$$

Les autres s'en déduisent de la manière suivante.

Changeons d'abord a en $a + iK'$, nous aurons

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)}e^{-\frac{i\pi x}{2K}} = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']},$$

puis, en multipliant par $e^{\frac{i\pi x}{2K}}$,

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} = \sum \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']}.$$

Mettons enfin dans ces deux relations $a + K$ au lieu de a, on obtiendra les formules qui restaient à établir

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)H_1(a)} = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\cos\frac{\pi}{2K}(a+2niK')},$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H_1(x+a)}{\Theta(x)\Theta_1(a)} = \sum \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi x}{2K}}}{\cos\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']}.$$

Je joindrai immédiatement à ces expressions des quatre quotients contenant $\Theta(x)$ en dénominateur ceux dont le dénominateur est $\Theta_1(x)$, et qui s'en tirent par le changement de x en $x+\mathrm{K}$. Les formules ainsi réunies ont un même caractère analytique essentiellement distinct de celles que nous obtiendrons ensuite; je conviendrai, afin de les écrire de la manière la plus simple, de représenter par les lettres n et m tous les entiers pairs et impairs, tant positifs que négatifs; cela étant, on a le tableau suivant :

$$(1)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(2)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)\,\Theta(a)}=\sum\frac{e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(3)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(4)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\Theta(x)\,\Theta_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(5)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\mathrm{H}(a)}=\sum\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(6)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta(a)}=\sum\frac{i^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(7)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1(a)}=\sum\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(8)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta_1(a)}=\sum\frac{(-i)^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')}.$$

II.

Nous considérons en second lieu une série d'une forme entièrement différente de la précédente, qui est représentée ainsi :

$$\cot\frac{\pi a}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x + niK') + \varepsilon i\right].$$

Dans cette formule, l'entier n parcourt toute la suite des nombres pairs de $-\infty$ à $+\infty$, et la quantité désignée par ε doit être supposée nulle pour $n = 0$ et égale à l'unité positive ou négative, selon que n est lui-même positif ou négatif.

On devra donc, en n'introduisant que les entiers positifs

$$n = 2, 4, 6, \ldots,$$

la décomposer en deux séries partielles et l'écrire ainsi

$$\cot\frac{\pi a}{2K} + \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x + niK') + i\right]$$
$$+ \sum e^{-\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x - niK') - i\right],$$

ou bien encore, au moyen d'une transformation facile,

$$\cot\frac{\pi a}{2K} + \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum \frac{e^{\frac{i\pi}{2K}(na + niK' + x)}}{\cos\frac{\pi}{2K}(x + niK')} + \sum \frac{e^{-\frac{i\pi}{2K}(na - niK' + x)}}{\cos\frac{\pi}{2K}(x - niK')},$$

et c'est cette nouvelle forme qui conduit aux conditions de convergence. Remplaçons, en effet, pour de grandes valeurs de n, les deux dénominateurs $\cos\frac{\pi}{2K}(x + niK')$ et $\cos\frac{\pi}{2K}(x - niK')$ par $\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2K}(x + niK')}$ et $\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{K}(x - niK')}$, les termes généraux deviennent

$$2e^{\frac{i\pi}{2K}(na + 2niK' + 2x)}, \quad 2e^{-\frac{i\pi}{2K}(na - 2niK' + 2x)}.$$

Cela étant, si l'on fait encore $a = \alpha + i\alpha'$, on obtient pour la limite de

la racine $n^{\text{ième}}$ de leurs modules, en supposant n infini, les quantités

$$e^{-\frac{\pi}{2K}(\alpha'+2K')},\quad e^{\frac{\pi}{2K}(\alpha'-2K')}$$

et, par conséquent, les conditions

$$\alpha'+2K'>0,\quad \alpha'-2K'<0.$$

Notre seconde série est donc, comme la première, convergente, pour toute valeur de x, lorsque le coefficient de i dans la constante a est en valeur absolue inférieur à $2K'$. J'ajoute qu'elle définit encore une fonction doublement périodique de seconde espèce, et qu'en posant

$$\Pi(x)=\cot\frac{\pi a}{2K}+\sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+niK')+\varepsilon i\right],$$

on a les relations

$$\Pi(x+2K)=\Pi(x),\quad \Pi(x+2iK')=e^{-\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x).$$

La première est évidente et la seconde résulte de l'expression du produit $e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK')$, à savoir

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK')=e^{\frac{i\pi a}{K}}\cot\frac{\pi a}{2K}+e^{\frac{i\pi a}{K}}\sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+2iK'+niK')+\varepsilon i\right].$$

On a, en effet,

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\cot\frac{\pi a}{2K}=\cot\frac{\pi a}{2K}+i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}}+1\right),$$

et si nous changeons, comme il est permis, n en $n-2$ dans le terme général, il viendra

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK')=\cot\frac{\pi a}{2K}+i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}}+1\right)+\sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+niK')+\varepsilon i\right];$$

mais, sous cette forme et à l'égard du nouveau nombre n, une modification est apportée à la signification de ε. On doit, en effet, prendre

maintenant $\varepsilon = 1$ pour $n = 4, 6, 8,$ puis $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = -1$ pour $n = 2$, et $n = 0, -2, -4, \ldots$. Or on voit qu'en ajoutant aux termes correspondant à $n = 2$ et $n = 0$ d'une part $ie^{\frac{i\pi a}{K}}$, de l'autre i, et, par conséquent, en faisant entrer dans la somme la quantité $i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}} + 1\right)$, on retrouve pour ε précisément la signification qui lui a été donnée dans la fonction $\Pi(x)$. La relation à établir et, par conséquent, le caractère analytique de fonction doublement périodique de seconde espèce résulte donc encore de la composition même de la série considérée. Enfin, si l'on remarque que, dans le rectangle des périodes, il n'existe qu'un seul pôle $x = 0$, auquel correspond pour résidu $\frac{2K}{\pi}$, on obtient l'expression de $\Pi(x)$ au moyen des fonctions de Jacobi sous la forme $\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H(x)\,H(a)}$.

En prenant x et a, on a, par suite,

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H(x)\,H(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + niK') + \varepsilon i\right];$$

c'est le premier exemple et le type du second groupe de huit formules auxquelles nous allons parvenir.

Changeons d'abord a en $a + iK'$, on obtient, après avoir multiplié par $e^{\frac{i\pi x}{2K}}$ et en désignant par m l'entier impair $n+1$,

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H(x)\,\Theta(a)} = e^{\frac{i\pi x}{2K}}\cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + miK') + \varepsilon i\right].$$

Il suffit ensuite d'employer la relation

$$e^{\frac{i\pi x}{2K}}\cot\frac{\pi x}{2K} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + ie^{\frac{i\pi x}{2K}},$$

pour avoir en définitive et en faisant entier le terme $ie^{\frac{i\pi x}{2K}}$ sous le signe Σ,

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H(x)\,\Theta(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + miK') + \varepsilon i\right].$$

Le nombre m représente, dans cette formule, tous les entiers impairs, et ε doit être pris égal à $+1$ ou -1, suivant que m est positif ou négatif, sans jamais passer par zéro. En y changeant, ainsi que dans la précédente, a en $a+\mathrm{K}$, on obtient quatre relations qui, ensuite, en donnent quatre autres, lorsqu'on y remplace x par $x+\mathrm{K}$. C'est, par conséquent, le système complet des huit formules qu'il s'agissait d'obtenir et que je groupe dans le Tableau suivant :

$$(9)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}(a)} = \cot\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')+\varepsilon i\right],$$

$$(10)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\mathrm{H}(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{coséc}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')+\varepsilon i\right],$$

$$(11)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}_1(a)} = \cot\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} - \sum e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')-\varepsilon i\right],$$

$$(12)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{coséc}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} - \sum e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')-\varepsilon i\right],$$

$$(13)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\,\mathrm{H}(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')+\varepsilon i\right],$$

$$(14)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{séc}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum i^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')+\varepsilon i\right],$$

$$(15)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\,\mathrm{H}_1(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')-\varepsilon i\right],$$

$$(16)\quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{séc}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} - \sum i^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')-\varepsilon i\right].$$

III.

Depuis longtemps, M. Kronecker a eu l'idée de développer, suivant les puissances de q, les expressions de Jacobi, et, en 1877, l'illustre géomètre m'a donné communication des résultats extrêmement remarquables auxquels il s'est trouvé ainsi amené; en raison de leur intérêt,

j'indiquerai succinctement comment on y parvient. Il est indispensable pour cela de séparer, dans les séries dont nous avons donné le Tableau, les termes qui correspondent aux valeurs positives de ceux qui correspondent aux valeurs négatives des entiers désignés par m et n. En convenant donc qu'on supposera désormais

$$m = 1, 3, 5, \ldots; \quad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

il suffira, pour effectuer tous les développements suivant les puissances de q, d'employer les formules suivantes, où s est une constante positive, qu'on prendra tour à tour égale à m ou à n :

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a + siK')} = +2i\sum q^{\frac{ms}{2}} e^{-\frac{mi\pi a}{2K}},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a - siK')} = -2i\sum q^{\frac{ms}{2}} e^{\frac{mi\pi a}{2K}},$$

$$m = 1, 3, 5, \ldots;$$

$$\cot\frac{\pi}{2K}(a + siK') + i = -2i\sum q^{\frac{ns}{2}} e^{\frac{ni\pi a}{2K}},$$

$$\cot\frac{\pi}{2K}(a - siK') - i = +2i\sum q^{\frac{ns}{2}} e^{-\frac{ni\pi a}{2K}},$$

$$n = 2, 4, 6, \ldots.$$

Cela étant, si l'on convient encore de désigner par m' et n', comme on l'a fait plus haut pour m et n, tous les entiers impairs et tous les entiers pairs, positifs, on aura les seize formules suivantes :

$$(1) \qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\ \Theta(x+a)}{\Theta(x)\ H(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(2) \qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\ H(x+a)}{\Theta(x)\ \Theta(a)} = 4\sum q^{\frac{mm'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma - m'x),$$

$$(3) \qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\ \Theta_1(x+a)}{\Theta(x)\ H_1(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(4) \qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\ H_1(x+a)}{\Theta(x)\ \Theta_1(a)} = +4\sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma - m'x);$$

$$(5)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,H(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi a}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(6)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta(a)} = \qquad 4\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma - m'x),$$

$$(7)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta_1(x)\,H_1(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi a}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(8)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta_1(a)} = \qquad 4\sum(-1)^{\frac{m+m'-2}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma - m'x);$$

$$(9)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H(x)\,H(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \cot\frac{\pi a}{2K} + 4\sum q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + n'x),$$

$$(10)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + mx),$$

$$(11)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H(x)\,H_1(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} - \operatorname{tang}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + n'x),$$

$$(12)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + mx);$$

$$(13)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H_1(x)\,H(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} + \cot\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n'}{2}} q^{\frac{nn'}{1}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + n'x),$$

$$(14)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H_1(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(na + mx),$$

$$(15)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H_1(x)\,H_1(a)} = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} - \operatorname{tang}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n+n'-2}{2}} q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na + n'x),$$

$$(16)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H_1(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(na + mx).$$

On remarquera que dans les huit premières relations figurent, sous les signes trigonométriques, des différences d'arguments, tandis que les suivantes contiennent toutes des sommes. Les développements, suivant les puissances de q, conservent donc trace de la différence analytique signalée précédemment entre les fonctions du premier et celles du second groupe ([1]).

([1]) Un Travail important de M. Scheibner, qui a paru dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Saxe, en 1883, sous le titre : *Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form,* contient dans une note les développements en séries trigonométriques des mêmes fonctions que j'ai considérées. Je m'empresse de signaler ces résultats, dont je n'ai eu que récemment connaissance, en remarquant que les formules du savant auteur sont présentées sous une forme semblable à celle qu'a adoptée Jacobi, dans ses Recherches sur la rotation, et entièrement différente de la mienne.

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. R. LIPSCHITZ,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BONN.

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE.

Comme j'avais étudié, il y a peu de temps, votre beau Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* j'ai suivi avec d'autant plus de plaisir les développements de votre Lettre. Un intérêt particulier me semble attaché à l'expression

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(z+\omega)}{H(z)H(\omega)},$$

pour laquelle vous donnez les deux développements

$$\cot\frac{\pi z}{2K}+\sum\left[\cot\frac{\pi}{2K}(\omega+2niK')+\varepsilon i\right]e^{\frac{ni\pi z}{K}},$$

où $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ε étant $1, 0, -1$, suivant que n est positif, nul ou négatif, et

$$\cot\frac{\pi z}{2K}+\cot\frac{\pi\omega}{2K}+4\sum q^{2nn'}\sin\frac{\pi}{K}(nz+n'\omega),$$

où $n, n'=1, 2, 3, \ldots$.

La seconde série est distinguée par le fait que l'exposant de q contient, par rapport aux deux nombres n et n', la moitié de la différence

des deux carrés $(n+n')^2-(n-n')^2$, tandis que toutes les généralisations usitées de Θ contiennent dans l'exposant de q des formes essentiellement positives. Un autre résultat se prête au moment où l'on introduit pour z et ω deux quantités complexes conjuguées : $z=x+iy$, $\omega=x-iy$, et en même temps, au lieu de la période K', une expression $K'+gt$, où g désigne une quantité réelle constante, t une quantité réelle variable.

Si l'on écrit $H(z,q)$ au lieu de $H(z)$, la fonction réelle

$$U=\frac{2K}{\pi}\frac{H\left[0,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]H\left[2x,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]}{H\left[x+iy,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]H\left[x-iy,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]}$$

est égale à la série

$$\cot\frac{\pi(x+iy)}{2K}+\cot\frac{\pi(x-iy)}{2K}+4\sum e^{-2nn'\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\sin\frac{\pi}{K}[n(x+iy)+n'(x-iy)].$$

La dernière a la propriété de satisfaire à l'équation différentielle partielle, qui détermine le mouvement de la chaleur dans un plan, dont les points ont les coordonnées rectilignes x, y, le temps étant désigné par t.

En effet, cette équation est la suivante

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},$$

où a désigne une constante physique.

Les deux premiers membres donnent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

et en même temps

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Le terme général de la série, en formant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, reçoit le facteur $-\frac{\pi^2}{K^2}[(n+n')^2-(n-n')^2]$; en formant $\frac{\partial u}{\partial t}$, il reçoit le facteur

$-2nn'\frac{\pi}{K}g$. Cela vu, l'équation du mouvement de la chaleur se trouve remplie aussitôt que l'on détermine la constante g par l'équation

$$g = \frac{2a^2\pi}{K}.$$

Or je me suis proposé de trouver le problème du mouvement de la chaleur, qui est résolu par votre fonction. Le fait qu'elle devient infinie dans le rectangle des périodes

$$-K \leqq x \leqq K, \quad -(K'+gt) \leqq y \leqq (K'+gt),$$

seulement pour le point $x+iy=0$, conduit aux considérations suivantes. Supposez que la température u soit égale à la somme d'une fonction v, qui reste finie et continue dans les environs du point $x+iy=0$, et de l'expression $\sigma \log r$, où σ désigne une constante et où $x+iy=re^{i\theta}$; j'admets que l'on décrive au point milieu $x+iy=0$ un cercle de rayon R, et que l'on détermine la quantité de chaleur qui entre dans le plan par le cercle. Alors, une constante physique positive étant nommée b, il faut évaluer l'intégrale

$$-b\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}R\,d\theta.$$

Pour une valeur décroissante de R la fonction finie et continue v donne une partie infiniment petite, mais la fonction $\sigma\log r$ donne la partie finie $-2\pi\sigma b$. Nous avons donc le phénomène d'un orifice, par lequel s'écoule pendant l'unité de temps une quantité constante de chaleur $-2\pi\sigma b$. Dans notre cas, la fonction u pour $x+iy=0$ devient égale à la somme d'une fonction finie et continue et de l'expression

$$\frac{2K}{\pi}\left(\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{x-iy}\right).$$

Soit dénotée par α une quantité positive, ladite expression est la limite vers laquelle converge le quotient

$$\frac{4K}{\pi}\,\frac{\frac{1}{2}\log[(x+\alpha)^2+y^2]-\frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+y^2]}{2\alpha}$$

pour une valeur décroissante de α. Il faut donc décrire au point milieu $x+iy=0$ un cercle de rayon R, et faire ainsi que les deux quantités α et R décroissent de manière que $\frac{\alpha}{\mathrm{R}}$ décroisse aussi. Alors la chaleur qui s'écoule par le cercle de rayon R entre dans ce plan de telle sorte que s'il y a deux orifices, l'un au point $x+iy=\alpha$, l'autre au point $x+iy=-\alpha$, et que par le premier s'écoule une quantité de chaleur égale à $\frac{4\mathrm{K}}{\alpha}b$, par le second une quantité égale à $-\frac{4\mathrm{K}}{\alpha}b$, les deux quantités de chaleur sont égales et opposées, et leur grandeur absolue devient d'autant plus grande que la distance 2α devient plus petite, supposition semblable à celle sur laquelle est fondée la définition des masses magnétiques. D'ailleurs il est clair que, par la définition de la quantité de chaleur qui s'écoule par les deux orifices voisins, la période K est entièrement déterminée.

Évidemment la fonction u est construite ainsi, qu'elle satisfait aux deux équations

$$u(-x,y)=-u(x,y), \tag{1}$$
$$u(x,-y)=u(x,y). \tag{2}$$

De plus les équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(x+iy+2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}(x+iy),\\
\mathrm{H}(x+iy+2i\mathrm{K}') &= -e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+iy)+\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\mathrm{H}(x+iy)
\end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(x+iy+2\mathrm{K})\ \mathrm{H}(x-iy-2\mathrm{K}) &= \mathrm{H}(x+iy)\,\mathrm{H}(x-iy),\\
\mathrm{H}(x+iy+2i\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(x-iy-2i\mathrm{K}') &= e^{\frac{2\pi}{\mathrm{K}}(y+\mathrm{K}')}\,\mathrm{H}(x+iy)\,\mathrm{H}(x-iy).
\end{aligned}$$

La fonction remplit donc les deux relations

$$u(x+2\mathrm{K},y)=u(x,y), \tag{3}$$
$$u[x,y+2(\mathrm{K}'+gt)]=\frac{u(x,y)}{e^{\frac{2\pi}{\mathrm{K}}(y+\mathrm{K}'+gt)}}. \tag{4}$$

D'ailleurs il est clair que, dans le rectangle

$$-\mathrm{K}\leqq x\leqq+\mathrm{K},\quad -\mathrm{K}'-gt\leqq y\leqq \mathrm{K}'+gt,$$

la fonction s'évanouit aux deux côtés

$$x = -K \quad \text{et} \quad x = K$$

par le facteur

$$H\left[2x, e^{-\frac{\pi}{K}(K'+gt)}\right];$$

il règne donc ici la température fixe $u = 0$. Afin de connaître l'état de la température dans le côté $y = K' + gt$, formons, pour une quantité positive β, la différence des températures

$$u(x, K' + gt + \beta) - u(x, K' + gt - \beta),$$

qui, suivant (2), est égale à la différence

$$u(x, K' + gt + \beta) - u[x, -(K' + gt) + \beta]$$

et, suivant (4), égale au produit

$$u[x, -(K' + gt) + \beta]\left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{K}\beta}} - 1\right).$$

En divisant par 2β et en faisant décroître β, on trouve la limite

$$-u[x, -(K' + gt)]\frac{\pi}{K} = -u(x, K' + gt)\frac{\pi}{K}.$$

Le quotient différentiel partiel de u pris par rapport à y devient donc égal au produit de la fonction et du facteur constant $-\frac{\pi}{K}$. Pour le côté $y = -(K' + gt)$, le quotient différentiel partiel pris par rapport à y donne la fonction u multipliée par le facteur opposé $\frac{\pi}{K}$.

Mais, si notre plan est entouré, aux deux côtés $y = K' + gt$ et $y = -K' - gt$, par un gaz de la température zéro, le quotient différentiel de la température pris par rapport à la normale de la ligne limite doit tenir un rapport fixe à la température elle-même existante dans la ligne limite. Donc votre fonction u exprime en forme finie la température dans un plan rectiligne, où la chaleur entre dans les environs de $x + iy = 0$ par deux orifices voisins de la manière exposée, où, dans les deux côtés $x = K$, $x = -K$, est donnée la température fixe égale à zéro, où les deux côtés $y = K' + gt$, $y = -(K' + gt)$ ont

un mouvement prescrit proportionnel au temps t, où, dans ces deux côtés le quotient $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}$ a la raison fixe $-\dfrac{\pi}{\mathrm{K}}$ pour le premier, $+\dfrac{\pi}{\mathrm{K}}$ pour le second côté, conformément à la symétrie, et où, pour $t=0$, l'état initial est exprimé par la fonction

$$u=\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'\left(0, e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right)\mathrm{H}\left(2x, e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right)}{\mathrm{H}\left(x+iy, e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right)\mathrm{H}\left(x-iy, e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right)}.$$

Pendant que le temps procède, le rectangle retient la même hauteur $2\mathrm{K}$, tandis que la largeur $2(\mathrm{K}'+gt)$ devient de plus en plus grande. Pour un temps infini, la largeur devient infinie, et la température, en équilibre dans le bandeau, est exprimée par la fonction simple

$$\cot\frac{\pi(x+iy)}{2\mathrm{K}}+\cot\frac{\pi(x-iy)}{2\mathrm{K}}.$$

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR M. GOMES TEIXEIRA,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COIMBRE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PORTO.

La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à x, y et y' à coefficients entiers

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

s'il existe une valeur de n déterminée à partir de laquelle les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, ... contiennent des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n+1$, $n+2$, $n+3$, ...

On peut tirer ce théorème de la formule suivante, qui résulte de l'expression analytique de la dérivée d'ordre n des fonctions composées, et qui donne la dérivée d'ordre n de la fonction y (*Journal de Battaglini*, t. XVIII):

$$\sum \frac{(y')^{\alpha}(y'')^{\beta}(y''')^{\gamma}\ldots(y^{(n-1)})^{\lambda}(y'')^{\alpha'}(y''')^{\beta'}\ldots(y^{(n-1)})^{\omega'}(y^{(n)})^{\lambda'}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,(2!)^{\beta+\beta'}(3!)^{\gamma+\gamma'}\ldots(n-1!)^{\lambda+\lambda'}\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c} = 0. \tag{3}$$

Dans cette équation la somme Σ se rapporte à toutes les solutions

entières positives de l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+(n-1)\lambda+\alpha'+2\beta'+3\gamma'+\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+(n-1)\lambda'+\alpha''=n-1,\end{aligned}\right.$$

et l'on a posé

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &m=\alpha+\beta+\ldots+\lambda+\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda'+\alpha'',\\ &a=\alpha+\beta+\ldots+\lambda,\quad b=\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda',\quad c=\alpha''.\end{aligned}\right.$$

Nous avons donc

$$\sum\frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots n^{\lambda'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\cdots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}\left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta!\ldots\lambda'!\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}=0$$

ou, en séparant le terme qui contient $y^{(n)}$,

$$\sum\frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots(n-1)^{\omega'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\cdots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}+n\,\frac{dF}{dy'}\,\frac{y^{(n)}}{n!}=0.$$

Si l'on pose maintenant $x=0$ dans cette formule, on obtient une autre formule qui donne les valeurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots \frac{y_0^{(n)}}{n!}$, qui doivent coïncider avec les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la série proposée.

On voit par cette formule que le dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ne peut contenir que les facteurs premiers suivants:

1° Ceux qui résultent du dénominateur

$$\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\alpha''!;$$

2° Ceux qui résultent du dénominateur de

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}\right)_{x=0};$$

3° Ceux qui résultent du numérateur de

$$\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0};$$

4° Ceux qui résultent des dénominateurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots, \frac{y_0^{(n-1)}}{n-1!}$;

5° Ceux qui résultent de n.

Nous allons voir que les facteurs premiers correspondant aux trois premiers cas n'augmentent pas indéfiniment avec n.

I. Comme la fonction $F(x, y, y')$ est entière par rapport à x, y et y', les dérivées de cette fonction d'ordre supérieur à son degré sont nulles, et par conséquent m ne peut pas augmenter indéfiniment. Donc les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots \lambda', \alpha''$, dont la somme est égale à m, ne peuvent augmenter indéfiniment, ni par conséquent leurs facteurs premiers.

II. La dérivée

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a\, dy^b\, dy'^c}\right)_{x=0},$$

qui est fonction entière de y_0 et y'_0 et, par conséquent, de a_0 et a_1, ne peut contenir évidemment en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs de a_0 et a_1.

III. La dérivée $\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0}$, qui est une fonction entière à coefficients entiers de a_0 et a_1, est une fraction déterminée, et ne peut donc contenir en numérateur des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment.

On voit donc que les facteurs premiers du dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ou a_n ne peuvent augmenter indéfiniment que par suite de la présence du facteur n du cinquième cas, et nous avons donc le théorème énoncé.

Exemple. — La fonction définie par la série

$$1 + \frac{x}{2!\,2} + \frac{x^2}{3!\,3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1!\,n+1}$$

ne peut pas satisfaire à une équation $F(x, y, y') = 0$ algébrique par rapport à x, y et y', parce que le coefficient $\frac{1}{n+1!\,n+1}$ de x^n peut contenir des facteurs premiers supérieurs à n.

Donc la fonction correspondante

$$\frac{\int \frac{e^x}{x}\,dx + \log x}{x}$$

ne peut satisfaire à une équation algébrique en x, y et y'. Elle est donc différente des fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires, etc.

2. On sait (¹) qu'il est toujours possible de trouver un couple de périodes primitives 2ω, $2\omega'$, tel que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ soit positive et même plus grande qu'un nombre assigné d'avance, par exemple plus grande que $\frac{1}{2}$.

Posons

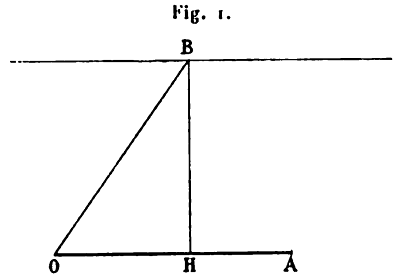
$$\frac{\omega'}{\omega} = r + is,$$

où

$$s > \tfrac{1}{2},$$

et soient OA, OB (*fig.* 1) les droites représentant respectivement ω

Fig. 1.



et ω' en grandeur et en direction. Si l'on mène BH perpendiculairement à OA, on obtient

$$BH = OB \sin\widehat{BOA};$$

or

$$OB = \operatorname{mod}\omega', \quad \sin\widehat{BOA} = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}} = \frac{s \operatorname{mod}\omega}{\operatorname{mod}\omega'};$$

donc

$$BH = s \operatorname{mod}\omega > \tfrac{1}{2}\operatorname{mod}\omega$$

ou bien

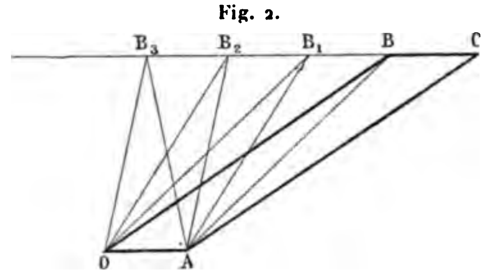
$$BH > \tfrac{1}{2}.OA.$$

Il suit de là que, si l'on mène par B une droite parallèle à OA, les droites joignant un point quelconque de cette ligne avec O et A renferment en tous cas un angle aigu.

(¹) *Voir* Ouvrage cité, p. 4.

Cela posé, soit OACB (*fig.* 2) un parallélogramme dont les côtés sont égaux respectivement à ω, ω'. Si les angles $\widehat{BAO}$, $\widehat{BOA}$ sont aigus, le couple 2ω, $2\omega'$ remplit la troisième condition du théorème. Si l'un d'eux, par exemple $\widehat{BAO}$, est obtus, qu'on prenne sur la CB prolongée

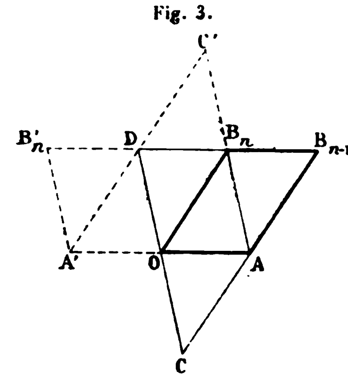
Fig. 2.



les segments BB_1, B_1B_2, ..., tous égaux à CB. Après un nombre fini d'opérations, on aboutira sans doute à un point B_n (dans la figure, $n = 3$), tel que l'angle $\widehat{OAB_n}$ soit aigu et l'angle $\widehat{OAB_{n-1}}$ obtus. Alors l'angle AOB_n sera aigu et le parallélogramme $OAB_{n-1}B_n$ sera divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

3. Du parallélogramme $OAB_{n-1}B_n$ on peut en déduire (*fig.* 3) deux

Fig. 3.



autres, OAB_nD, OB_nAC, ayant la même propriété; on les obtient en menant par O une droite DC parallèle à B_nA et en prolongeant les côtés $B_{n-1}B_n$, $B_{n-1}A$ du premier parallélogramme.

Les côtés de $OAB_{n-1}B_n$ sont

(a) $$OA = \omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega;$$

ceux de OAB_nD sont

(b) $$OA = \omega, \quad OD = \omega' - (n+1)\omega;$$

ceux de OB_nAC sont

(c) $$OC = -OD = (n+1)\omega - \omega', \quad OB_n = \omega' - n\omega.$$

On obtient, en outre, trois autres parallélogrammes en renversant la direction de l'un des côtés de chaque parallélogramme précédemment considéré (1); les côtés de ces nouveaux parallélogrammes sont :

Pour $OA'DB_n$,

(d) $$OA' = -\omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega;$$

pour $OA'B'_nD$,

(e) $$OA' = -\omega, \quad OD = \omega' - (n+1)\omega;$$

pour $ODC'B_n$,

(f) $$OD = \omega' - (n+1)\omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega.$$

4. Désignons, en général, par Ω, Ω' les côtés de chaque parallélogramme; pour que la partie réelle de $\frac{\Omega'}{\Omega i}$ soit positive, on doit poser :

Dans le parallélogramme	(a).....	$\Omega = \omega$,	$\Omega' = \omega' - n\omega$;
» »	(b)....	$\Omega = \omega$,	$\Omega' = \omega' - (n+1)\omega$;
» »	(c).....	$\Omega = (n+1)\omega - \omega'$,	$\Omega' = \omega' - n\omega$;
» »	(d)....	$\Omega = \omega' - n\omega$,	$\Omega' = -\omega$;
» »	(e)....	$\Omega = \omega' - (n+1)\omega$,	$\Omega' = -\omega$;
» »	(f).....	$\Omega = \omega' - n\omega$,	$\Omega' = \omega' - (n+1)\omega$.

Ces couples de côtés, pris dans l'ordre adbecf ou dans l'ordre beadcf,

(1) Dans la figure nous avons distingué par des traits discontinus les côtés de ces parallélogrammes qui n'appartiennent pas aux précédents.

suivant que n est pair ou impair, sont congrus, par rapport aux périodes de pu, respectivement aux six couples

$$\omega, \omega'; \ \omega', \omega; \ \omega, \omega'', \ \omega'', \omega; \ \omega', \omega''; \ \omega'', \omega',$$

où

$$\omega'' = \omega + \omega'.$$

Or, puisque

$$p\omega = e^{(\lambda)}, \quad p\omega' = e^{(\mu)}, \quad p\omega'' = e^{(\nu)},$$

où $e^{(\lambda)}e^{(\mu)}e^{(\nu)}$ est une permutation de $ee'e''$, parmi les six parallélogrammes considérés il y en aura nécessairement un dont les côtés satisferont aux conditions

$$p\Omega = e, \quad p\Omega' = e',$$

e, e' étant désignés d'avance.

5. Nous devons maintenant démontrer qu'il n'y a pas de couple de périodes primitives différent de 2Ω, $2\Omega'$ et de -2Ω, $-2\Omega'$ qui remplisse les conditions du théorème.

Si deux grandeurs ω, ω' satisfont aux équations

$$p\omega = e, \quad p\omega' = e',$$

elles ont nécessairement la forme

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \omega = \Omega + 2m\Omega + 2n\Omega' = (1+2m)\Omega + 2n\Omega', \\ \omega' = \Omega' + 2m'\Omega + 2n'\Omega' = 2m'\Omega + (1+2n')\Omega', \end{cases}$$

où m, n, m', n' sont des nombres entiers quelconques.

Pour que 2ω, $2\omega'$ soit un couple de périodes *primitives* de pu, il doit être

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2m & 2n \\ 2m' & 1+2n' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

et enfin, pour que la partie réelle de $\dfrac{\omega'}{\omega i}$ soit positive, il doit être $\Delta = +1$.

Nous devons donc chercher s'il y a un système de nombres m, n, m', n' (dont un au moins soit différent de zéro), liés par l'équation

$$(\beta) \qquad (1+2m)(1+2n') - 4m'n = 1,$$

tel que le parallélogramme (ω, ω') [1], ω et ω' étant donnés par les équations (α), soit divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

6. Le nombre des cas à étudier est diminué considérablement par les remarques suivantes :

I. Deux couples 2ω, $2\omega'$ et -2ω, $-2\omega'$ satisfont ou ne satisfont pas ensemble à la troisième condition du théorème. Cela réduit à la moitié le nombre des cas. On peut, par exemple, laisser de côté tous les systèmes de nombres m, n, m', n', où l'un déterminé d'entre eux est négatif.

Nous conviendrons de ne donner à m' que des valeurs positives.

II. Si les nombres m, n, m', n' satisfont à l'équation (β), elle est satisfaite aussi par les nombres n', m', n, m. Donc, pour chaque couple (α), il y en a un autre

$$(\alpha') \qquad \bar{\omega} = (1+2n')\Omega + 2m'\Omega', \quad \bar{\omega}' = 2n\Omega + (1+2m)\Omega'.$$

Or, au point de vue géométrique, c'est-à-dire, tant qu'on ne tient pas compte de la grandeur Ω, Ω' et de la condition $s > \frac{1}{2}$, rien ne distingue Ω de Ω'; de façon que l'on peut désigner par Ω', Ω les mêmes côtés du parallélogramme (Ω, Ω') qu'on appelait d'abord Ω, Ω'. Après cela il sera

$$\bar{\omega} = \omega', \quad \bar{\omega}' = \omega.$$

C'est-à-dire, si le parallélogramme (ω, ω') se déduit de (Ω, Ω') par un certain procédé géométrique, on en déduira par le même procédé le parallélogramme $(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, pourvu seulement qu'on opère maintenant par rapport au côté Ω' de la même façon qu'on opérait auparavant par rapport au côté Ω, et inversement.

Si donc on a démontré géométriquement, à savoir, sans tenir compte de la grandeur de Ω, Ω' et de la condition $s > \frac{1}{2}$, que le parallélogramme (ω, ω') remplit ou ne remplit pas la troisième condition du théorème, on pourra regarder la même chose comme établie aussi pour le parallélogramme $(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$. En d'autres termes, la considération d'un

---

[1] Nous désignons ainsi le parallélogramme dont deux côtés contigus sont ω, ω'.

système de nombres m, n, m', n' nous exempte de celle du système n', m', n, m.

III. Les nombres n, n' ont ou n'ont pas même signe, suivant que m est positif ou négatif (m' étant toujours supposé positif). Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la grandeur de l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$, on peut prendre n toujours positivement.

IV. Si la valeur absolue de $(1 + 2m)$ est plus petite que $2m'$, la valeur absolue de $(1 + 2n')$ est plus grande que $2n$. Alors, en appliquant la remarque II de ce numéro, on obtient un système de nombres m_1, n_1, m'_1, n'_1, où

$$m_1 = n', \quad n_1 = m', \quad m'_1 = n, \quad n'_1 = m,$$

pour lesquels on a

$$\text{val. abs.}(1 + 2m_1) > 2m'_1.$$

On peut donc se passer de l'étude des systèmes où la valeur absolue de $(1 + 2m)$ est moindre que $2m'$; ou bien on peut toujours supposer

$$\text{val. abs.}(1 + 2m) > 2m'.$$

7. Ceci établi, nous pouvons entamer la démonstration de la deuxième partie de notre théorème.

Il nous faut avant tout énoncer un lemme, d'ailleurs tout à fait évident. Si les côtés contigus OA, OB du parallélogramme OACB (*fig.* 4, 5)

Fig. 4.

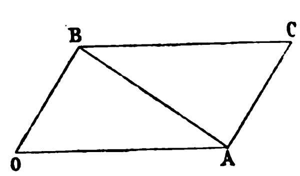
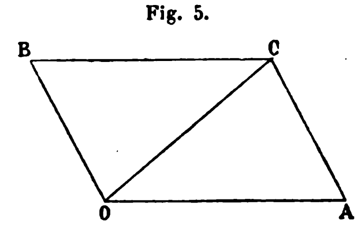


Fig. 5.



ont les directions de Ω, Ω', et si $OA = h\Omega$, $OB = k\Omega'$, où h, k sont des grandeurs positives, l'angle $\widehat{OAB}$ (de la *fig.* 4) ou $\widehat{AOC}$ (de la *fig.* 5) est certainement aigu si $h \geqq k$; au contraire l'angle $\widehat{ABO}$ (de la *fig.* 4) ou $\widehat{ACO}$ (de la *fig.* 5) est certainement aigu si $k \geqq h$.

Cela découle immédiatement du fait que le parallélogramme (Ω, Ω') est divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

8. On peut ordonner comme il suit les cas dont il nous faut nous occuper :

$$\text{(A) Les nombres } m', n \text{ ne sont pas nuls } \begin{cases} 1^\circ \ m > 0 \begin{cases} (\alpha) \text{ L'angle } \widehat{\Omega\Omega'} \text{ est aigu} \\ (\beta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{obtus} \end{cases} \\ 2^\circ \ m < 0 \end{cases}$$

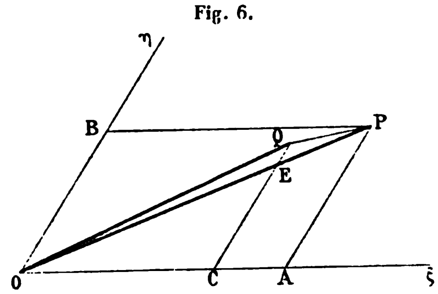
(B) L'un au moins des nombres m', n est nul.

9. (A) Les nombres m', n ne sont pas nuls.

1° $m > 0$. Soient $O\xi$, $O\eta$ (*fig.* 6) les directions de Ω, Ω', et faisons

$$OA = (1 + 2m)\Omega, \quad OC = 2m'\Omega < OA, \quad AP = 2n\Omega', \quad CQ = (1 + 2n')\Omega'.$$

Fig. 6.



Si OP coupe CQ au point E, on a

$$CE = \frac{AP \cdot OC}{OA} = \frac{2n \cdot 2m'}{1 + 2m}\Omega' < (1 + 2n')\Omega',$$

de façon que Q est sur le prolongement de CE. D'ailleurs de (β) et de l'inégalité

$$1 + 2m > 2m'$$

on tire

$$2m'(1 + 2n' - 2n) < 1,$$

c'est-à-dire

$$2n > 1 + 2n',$$

d'où

$$AP > CQ.$$

Donc Q est dans l'intérieur du triangle OBP.

Il nous faut maintenant distinguer les cas (α), (β).

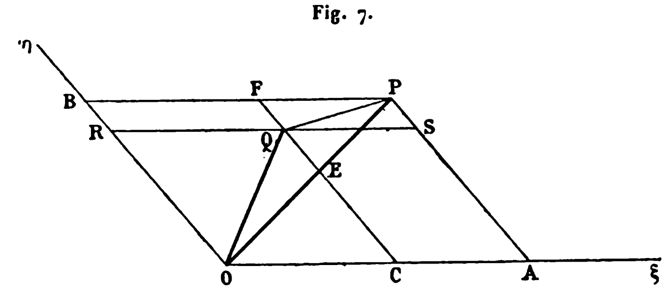
(α). Si l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est aigu (*fig.* 6), l'angle $\widehat{OBP}$ est obtus, et $\widehat{OQP}$ l'est à plus forte raison. Donc le parallélogramme dont les côtés sont

$$OP = (1+2m)\Omega + 2n\Omega' = \omega, \quad OQ = 2m'\Omega + (1+2n')\Omega' = \omega'$$

ne remplit pas la troisième condition du théorème.

(β). L'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est obtus (*fig.* 7). Si $2m' > 1+2n'$, en appliquant

Fig. 7.



au parallélogramme OCQR le lemme du n° 7, on voit que l'angle $\widehat{RQO}$ est aigu; donc l'angle $\widehat{OQP}$, qui est plus grand que $180° - \widehat{RQO}$, est obtus.

Soit au contraire $2m' < 1+2n'$. De la relation (β) on tire

$$1+2m-2m' = \frac{4m'n+1}{2n'+1} - 2m' = \frac{2m'}{2n'+1}(2n-2n') - \frac{2m'-1}{2n'+1},$$

et, comme

$$2m' < 1+2n', \quad 2n > 2n',$$

il sera

$$1+2m-2m' < 2n-2n' - \frac{2m'-1}{2n'+1} \leqq 2n-2n'-1.$$

En appliquant donc au parallélogramme QSPF le lemme déjà cité, on voit que l'angle $\widehat{PQF}$ est aigu; d'où il suit que l'angle $\widehat{PQO}$, qui est plus grand que $180° - \widehat{PQF}$, est obtus.

Donc le parallélogramme (OP, OQ) ne remplit pas la troisième condition du théorème.

10. 2° $m < 0$ [1]. — Soit encore (*fig.* 8)

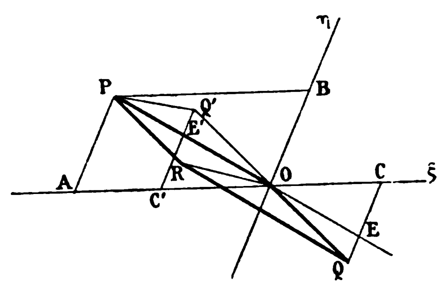
$$OA = (1+2m)\Omega,\quad OC = 2m'\Omega < \operatorname{mod} OA,\quad OB = 2n\Omega',\quad CQ = (1+2n')\Omega'.$$

On démontre, comme dans le cas précédent, que

$$AP > \operatorname{mod} CQ,\quad \operatorname{mod} CQ > \operatorname{mod} CE.$$

Prenons sur OA le segment $OC' = CO$; par C' menons C'E'Q' parallèle à OB et faisons $C'Q' = QC$. Le point Q' sera sur le prolongement de QO, et les segments QO, OQ' seront égaux. Achevons de construire

Fig. 8.



le parallélogramme OPRQ des nouvelles périodes ω, ω'. Il est aisé de voir que les triangles ORP, PQ'O sont égaux; donc $\widehat{ORP} = \widehat{PQ'O}$. Or $\widehat{PQ'O}$ n'est autre chose que l'angle $\widehat{PQO}$ du numéro précédent, et conséquemment il est obtus; donc l'angle $\widehat{ORP}$ l'est aussi; et OPRQ n'est pas divisé par OR en deux triangles acutangles.

11. (B) L'un au moins des nombres m', n est nul. La (β) se réduit à

$$(1+2m)(1+2n') = 1,$$

Cette équation admet deux solutions, à savoir

$$m = n' = 0,\quad m = n' = -1.$$

---

[1] Il n'y a pas lieu de considérer le cas $m = 0$, parce que nous sommes convenus de lui donner toujours des valeurs telles qu'il soit

$$\text{val. abs.}\,(1+2m) > 2m',$$

ce qui n'est pas possible, tant que m' n'est pas nul, si $m = 0$.

Ainsi le cas (B) donne naissance aux six cas suivants :

Cas.	m.	n.	m'.	n'.
(a)	0	0	0	0
(b)	0	n	0	0
(c)	0	0	m'	0
(d)	-1	0	0	-1
(e)	-1	n	0	-1
(f)	-1	0	m'	-1

Le cas (a) donne : $\omega = \Omega$, $\omega' = \Omega'$. Il n'y a donc pas à s'en occuper.

(b) se réduit à (c), (e) à (f) en vertu de la remarque II du n° 6.

(d) se réduit à (a), (f) à (c) en vertu de la remarque I du même numéro.

Tout se réduit donc au seul cas (c), à savoir :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = 2m'\Omega + \Omega'.$$

12. Soit OACB le parallélogramme (Ω, Ω'), où, si l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est aigu (*fig.* 9)

$$\text{OA} = \Omega, \quad \text{OB} = \Omega',$$

s'il est obtus (*fig.* 10)

$$\text{AO} = \Omega, \quad \text{AC} = \Omega'.$$

On sait que les triangles AOB, BAC sont acutangles. Prenons sur le

Fig. 9.

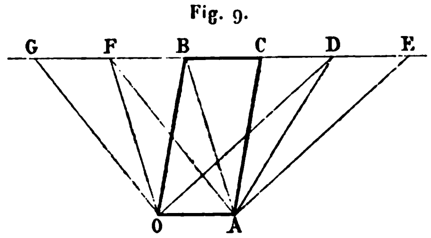
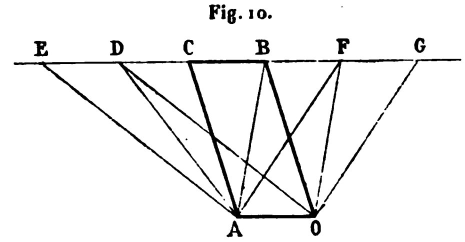


Fig. 10.



prolongement de BC les segments CD, DE égaux à BC. Comme l'angle $\widehat{\text{OAC}}$ est obtus, l'angle $\widehat{\text{OAD}}$ l'est à plus forte raison, et le parallélogramme OAED, c'est-à-dire (ω, ω'), où [1]

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 2\Omega,$$

[1] Ici et dans la suite le signe supérieur se rapporte à la *fig.* 9, l'inférieur à la *fig.* 10.

n'est pas divisé par AD en deux triangles acutangles. La même chose résulte *a fortiori* pour les parallélogrammes dont les côtés sont :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 4\Omega,$$
$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 6\Omega,$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prenons maintenant sur le prolongement de CB les segments BF, FG égaux à CB. Comme l'angle $\widehat{BAO}$ est aigu, son supplément, c'est-à-dire $\widehat{AOF}$, sera obtus, et le parallélogramme OAFG, dont les côtés ω, ω' sont

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 2\Omega,$$

ne sera pas divisé par sa diagonale plus courte OF en deux triangles acutangles. La même chose s'ensuivra *a fortiori* pour les parallélogrammes dont les côtés sont :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 4\Omega,$$
$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 6\Omega,$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons donc regarder notre théorème comme parfaitement établi dans tous les cas.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

DE L'EXISTENCE ET DES PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES

DES

RACINES DES ÉQUATIONS BINOMES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'Analyse, qui est la plus abstraite des Sciences, doit fournir des principes à toutes les autres, sans en emprunter à aucune, sinon les théories s'enchaînent mal et perdent tout à la fois de leur clarté et de leur certitude. On renverse donc absolument l'ordre naturel des choses quand on introduit des considérations géométriques autrement qu'à titre de simples images, dans la démonstration de faits purement analytiques, en particulier quand on fonde la théorie de l'équation binôme sur les propriétés des arcs de cercle et de leurs lignes trigonométriques.

Pour faire disparaître de l'Analyse cette tache regrettable, j'ai donné en 1872, dans mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, une démonstration de l'existence des racines de toutes les équations entières à une seule inconnue, dont les éléments sont tirés exclusivement des principes les plus simples de l'Algèbre. Toutefois cette démonstration devient plus courte et plus nette quand on en dégage tout ce qui concerne les racines des équations binômes, dont les propriétés offrent d'ailleurs une importance toute spéciale à cause du rôle considérable qu'elles jouent dans une foule de circonstances. C'est ce qui m'a conduit à traiter ces équations à part et à en proposer la théorie très simple que je développe ci-dessous.

Racine positive de l'équation $x^m = \mathrm{R}$, où R est une quantité positive.

2. J'aurai à m'appuyer sur les théorèmes généraux suivants, dont je rappelle seulement les énoncés :

Si l'on n'a pas $f(a, b, \ldots) = 0$, la fonction rationnelle $\dfrac{\mathrm{F}(x, y, \ldots)}{f(x, y, \ldots)}$ *tend vers* $\dfrac{\mathrm{F}(a, b, \ldots)}{f(a, b, \ldots)}$ *quand $x, y, \ldots$ tendent simultanément vers $a, b, \ldots$.*

3. *Pour que la variante v, prenant successivement les valeurs en nombre illimité*

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots,$$

tende vers quelque limite, il est nécessaire et suffisant que la différence $v_{n+p} - v_n$ tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, et cela quelque relation que l'on établisse entre n et p.

4. Passons à l'équation

$$x^m = \mathrm{R}, \tag{1}$$

en supposant R nul ou positif.

Si $\mathrm{R} = 0$, *cette équation binôme n'a d'autre racine que* 0. *Si* $\mathrm{R} > 0$, *elle a une racine positive unique qui, en même temps que* R, *est supérieure, égale ou inférieure à* 1.

Le premier point est évident. Pour établir le second, supposons d'abord $\mathrm{R} > 1$ et, appelant u une quantité positive supérieure à 1, formons la progression géométrique indéfinie

$$u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,$$

dont les termes croissent sans limite. Deux termes consécutifs convenablement choisis u^{k_u}, u^{k_u+1} comprendront certainement R, c'est-à-dire donneront lieu aux inégalités

$$u^{k_u} \leqq \mathrm{R} < u^{k_u+1}.$$

Cela posé, soient χ_u le quotient et ρ_u le reste de la division de k_u par m; posons $u^{\chi_u} = r_u$ et faisons tendre u vers 1.

Les inégalités précédentes donnant

$$\mathrm{R} - u^{k_u} < u^{k_u+1} - u^{k_u} < u^{k_u}(u-1) < \mathrm{R}(u-1),$$

la quantité u^{k_u} tend vers a. On en conclut que r_u^m tend aussi vers R; car on a

$$r_u^m = \frac{u^{k_u}}{u^{\rho_u}},$$

où les deux termes de la fraction tendent simultanément, le numérateur vers R, le dénominateur vers 1, parce que l'entier ρ_u reste inférieur au nombre fixe m (2).

Soient maintenant

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

les valeurs, évidemment toutes positives, que r_u acquiert successivement quand u tend vers 1. Les relations

$$\mathrm{R} = r_n^m + \varepsilon_n = r_{n+p}^m + \varepsilon_{n+p},$$

où ε_n, ε_{n+p} tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, et cela indépendamment de toute relation entre p et n, donnent

$$r_{n+p} - r_n = -\frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{r_{n+p}^{m-1} + r_{n+p}^{m-2} r_n + \ldots + r_{m-1}^n}.$$

Comme r_n, r_{n+p} finissent par surpasser toute quantité positive r_0 choisie de manière que r_0^m soit $<\mathrm{R}$, sans quoi r_n^m, r_{n+p}^m ne pourraient tendre vers R, le dénominateur du second membre de cette égalité finit par surpasser mr_0^{m-1}, d'où, en valeur absolue,

$$r_{n+p} - r_n < \frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{mr_0^{m-1}},$$

puis

$$\lim(r_{n+p} - r_n) = 0,$$

parce que ε_n, ε_{n+p} tendent simultanément vers zéro.

On en conclut (3) que r_n tend vers une certaine limite r, évidemment positive, qui est racine de l'équation (1) à cause de $r^m = \lim r_n^m = \mathrm{R}$ (2); on a de plus $r > 1$, sans quoi r^m serait $<\mathrm{R}$.

Si $\mathrm{R} < 1$, $\frac{1}{\mathrm{R}}$ est > 1, et l'équation $y^m = \frac{1}{\mathrm{R}}$ admet par ce qui précède

une racine positive $s > 1$. L'équation (1) a donc pour racine la quantité $r = \frac{1}{s}$, qui est positive, et < 1.

Si $R = 1$, l'équation (1) admet évidemment la racine $r = 1$.

Cette racine positive r, dont nous venons de constater l'existence dans tous les cas, est la seule que l'équation (1) puisse posséder; car, pour toute quantité positive r' non $= r$, on a r'^m non $= r^m$ et partant non $= R$.

5. Des transformations ultérieures, ayant ce théorème pour base, conduisent aux formules qui servent à combiner, par voie de multiplication, de division et d'élévation aux puissances, les racines des équations binômes, telles que (1). Ce sont les *règles du calcul des valeurs arithmétiques des radicaux* sur lesquelles nous n'avons pas à revenir.

Racine spéciale de l'équation $x^m = a$, où a est une quantité imaginaire de module 1 n'ayant aucun élément négatif.

6. L'existence du module υ d'une quantité imaginaire $u = (u', u'')$, ayant u', u'' pour *premier* et *second élément*, résulte de celle de la racine positive de l'équation binôme du second degré $\upsilon^2 = u'^2 + u''^2$ (4), après quoi les propositions énoncées aux nos (2), (3) s'étendent facilement aux quantités imaginaires. Nous aurons, en outre, à utiliser les observations particulières qui suivent.

I. *Quand le module de u se réduit à 1, chacun de ses éléments u', u'' est, en valeur absolue, inférieur à 1, égal au plus, ce qui résulte immédiatement de la condition*

$$u'^2 + u''^2 = 1.$$

II. *A une quantité réelle de valeur numérique égale ou inférieure à 1 donnée, répondent dans le premier cas 1, dans le second 2 quantités imaginaires de module 1, ayant cette quantité réelle pour élément de nom donné.*

Quand on se donne, par exemple, pour premier élément d'une quantité imaginaire u de module 1 la quantité u' satisfaisant aux conditions $-1 \leqq u' \leqq 1$, le second élément u'' de u dépend de l'équation

binôme

$$(1) \qquad u''^2 = 1 - u'^2,$$

dont le second membre ne peut être négatif.

Si $u' = \pm 1$, cette équation se réduit à $u''^2 = 0$ et n'admet d'autre racine que 0; $(\pm 1, 0)$ est donc la seule quantité de module 1 qui ait u' pour premier élément.

Si u' n'est pas $= \pm 1$, soit U'' la racine carrée positive de la quantité alors positive $1 - u'^2$ (4). L'équation (1) qui s'écrit aussi

$$(u'' - U'')(u'' + U'') = 0$$

donne soit $u'' = U''$, soit $u'' = -U''$, et les seules quantités répondant à la question sont

$$(2) \qquad (u', U''), \ (u', -U'').$$

III. *Les deux quantités du module* 1 *qui ont un même premier élément donné non* $= \pm 1$, *sont conjuguées, et chacune d'elles est l'inverse arithmétique de l'autre.*

Le premier point est évident, puisque les seconds éléments des quantités (2) sont égaux et de signes contraires. Le second résulte de ce que le produit de deux quantités imaginaires conjuguées est égal au carré de leur module commun, qui est ici 1.

IV. *Si le module de u restant égal à* 1, *l'un de ses éléments décroît de* 1 *à* 0, *puis de* 0 *à* -1, *la valeur correspondante nulle ou positive de l'autre élément* (II) *croît de* 0 *à* 1, *puis décroît de* 1 *à* 0. *La valeur nulle ou négative de ce même autre élément décroît de* 0 *à* -1, *puis croît de* -1 *à* 0.

Si, par exemple, c'est u' qui décroît de $+1$ à 0, puis de 0 à -1, u''^2, lié à u' par la relation (1), croît de 0 à 1 et décroît ensuite de 1 à 0. Si donc u'' ne devient jamais négatif, il augmente aussi de 0 à 1 pour diminuer ensuite de 1 à 0. Et de même, s'il s'agit de la valeur nulle ou négative de u''.

V. *Si les quantités* $U = (U', U'')$, $u = (u', u'')$ *ont* 1 *pour module commun, la seconde tend nécessairement vers la première quand l'un de*

ses éléments tend vers l'élément de même nom de la première, pourvu que leurs deux autres éléments finissent par n'être pas de signes contraires.

Soit, par exemple, $\lim(U' - u') = 0$; de $u'^2 + u''^2 = U'^2 + U''^2 = 1$, on tire

$$(U'' - u'')(U'' + u'') = -(U' - u')(U' + u').$$

Si $U'' = 0$, cette relation donne $\lim u'' = 0 = U''$.

Si U'' non $= 0$, on finit par avoir numériquement $U'' + u'' > U''$, d'où numériquement encore

$$U'' - u'' < \frac{U' + u'}{U''}(U' - u') < \frac{2}{U''}(U' - u'),$$

parce que le signe final de u'' est alors identique à celui de U''. On en conclut toujours $\lim u'' = U''$.

On a donc, dans les deux cas, $\lim u = U$, puisque l'on a simultanément $\lim u' = U'$, $\lim u'' = U''$.

VI. *Si les quantités $u = (u', u'')$, $v = (v', v'')$ ne sont pas nulles et n'ont aucun élément négatif, le second élément de leur produit ne l'est pas non plus et son premier élément croît algébriquement quand, dans l'un des facteurs, le premier élément vient à croître et le second à décroître, pourvu que le second facteur soit invariable ou bien subisse seulement une variation semblable à celle du premier.*

Les éléments du produit uv sont effectivement $u'v' - u''v''$, $u'v'' + u''v'$, expressions dont la nature spéciale rend évidents les points dont il s'agit.

VII. *Si $u = (u', u'')$ est une quantité imaginaire à éléments positifs et de module* 1, *cas auquel tous les termes de la progression géométrique*

$$u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots$$

ont 1 *aussi pour module commun, la différence des premiers éléments de deux termes consécutifs ne peut surpasser numériquement* $\operatorname{mod}(u - 1)$.

Si, d'autre part, les premiers éléments de

$$(3)\qquad u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^k.$$

ne sont jamais négatifs, leurs seconds éléments et même celui de u^{k+1} ne

le sont pas non plus. En outre, ces premiers éléments des quantités (3) *vont sans cesse en décroissant par degrés dont les valeurs numériques sont au moins égales à* $1 - u'$. *Par suite* (IV) *leurs seconds éléments vont sans cesse en augmentant.*

La différence des premiers éléments de u^k, u^{k+1} est le premier élément de leur différence $u^{k+1} - u^k = u^k(u - 1)$; numériquement donc, elle ne peut surpasser le module de cette dernière différence qui se réduit à $\bmod(u - 1)$, à cause de $\bmod u^k = 1$.

Si u^k n'a aucun élément négatif, $u^{k+1} = u^k u$ a son second élément positif, puisque ceux de u le sont tous deux (VI); u par hypothèse, puis $u^2 = u.u$, puis $u^3, \ldots$, puis finalement u^{K+1} ont donc leurs seconds éléments tous positifs.

En supposant $k < K$, les facteurs des produits $u^k u = u^{k+1}$, $u^k(1, 0) = u^k$ n'ont ainsi aucun élément négatif; d'autre part, les premiers facteurs sont égaux, et, dans les derniers, le premier élément de $(1, 0)$ surpasse celui de u, tandis que le second élément de $(1, 0)$ est inférieur à celui de u. Le premier élément de u^k est donc supérieur à celui de u^{k+1} (VI) ou, ce qui revient au même, les premiers éléments des termes de la suite (3) décroissent sans cesse.

Soient enfin $h < k$ des exposants tous deux inférieurs à K. On a (III)

$$u^{h+1} - u^h = u^{h+1}\left(1 - \frac{1}{u}\right) = u^{h+1}(1 - u', u''),$$

puis de même

$$u^{k+1} - u^k = u^{k+1}(1 - u', u''),$$

et aucun des éléments de u^{h+1}, u^{k+1}, $(1 - u', u'')$ n'est évidemment négatif. Ces deux produits ayant même dernier facteur pendant que, comme on vient de le voir, les éléments de u^{h+1} sont, le premier supérieur, le second par suite inférieur aux éléments correspondants de u^{k+1}, le premier élément du premier produit, c'est-à-dire de $u^{h+1} - u^h$, est algébriquement supérieur à celui de $u^{k+1} - u^k$ (VI). En d'autres termes, l'excès du premier élément de u^{h+1} sur celui de u^h surpasse algébriquement l'excès correspondant pour u^{k+1} et u^k. Ces deux excès étant négatifs, le second est numériquement le plus grand et, dans la suite (3), la valeur absolue de la différence des premiers éléments de deux termes consécutifs va sans cesse en augmentant; elle est donc

toujours au moins égale à ce qu'elle est pour les deux premiers, c'est-à-dire à $1 - u'$.

VIII. *Si* $v = (v', v'')$ *est une autre quantité de module* 1 *et à éléments positifs, le premier supérieur à* u', *le second par suite inférieur à* u'', *les éléments d'un terme quelconque de la progression géométrique*

$$v^0 = 1, v, v^2, \ldots, v^K \tag{4}$$

sont positifs à partir de ceux de v *et, respectivement aussi, le premier supérieur, le second par suite inférieur aux éléments de noms semblables du terme de même rang dans la progression* (3).

Le point en question étant vrai par hypothèse pour v comparé à u, supposons-le établi inclusivement jusqu'à V, U termes correspondants dans les suites (4), (3). Les termes suivants sont Vv, Uu, et, dans le passage du dernier de ces produits à l'autre, le premier élément de chaque facteur croît, tandis que le second décroît; donc (VI) le premier élément de Vv est supérieur algébriquement à celui de Uu, partant positif comme ce dernier. Ce premier élément de Vv est donc aussi numériquement supérieur à celui de Uu. Quant au second élément de Vv, il est forcément positif, puisque les éléments de ses facteurs le sont tous eux-mêmes (VI).

7. *Soit* $a = (a', a'')$ *une quantité imaginaire de module* 1, *dont le second élément est positif et le premier non négatif, l'équation*

$$x^m = a \tag{5}$$

possède quelque racine de module 1, *à éléments positifs.*

En appelant $u = (u', u'')$ une quantité de module 1 à éléments positifs, formons la progression géométrique indéfinie

$$u^0 = 1, u, u^2, \ldots,$$

dont tous les termes ont 1 aussi pour module commun.

Si les premiers éléments de ces puissances restent non négatifs jusqu'à celui de u^G inclusivement, ils décroissent à partir de 1 par degrés au moins égaux à $1 - u'$ (6, VII) et leur diminution totale est $\leqq 1$. Il

faut donc que $G(1-u')$ soit $\leqq 1$, c'est-à-dire que G ne surpasse pas le plus grand entier E contenu dans $\frac{1}{1-u'}$. De là résulte l'existence d'un certain entier $K_u \overline{\overline{<}} E$ tel que les premiers, et par suite les seconds éléments de

$$(6) \qquad u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^{K_u},$$

ne sont jamais négatifs, mais tel aussi que le premier élément de u^{K_u+1} l'est certainement (6, VII).

Le premier élément a' de a, n'étant ni <0 ni >1, tombe nécessairement entre ceux de deux termes consécutifs de

$$u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^{K_u},\ u^{K_u+1},$$

qui décroissent sans cesse, de 1 à quelque quantité négative; ce sera, par exemple, entre ceux de u^{k_u}, u^{k_u+1} où $k_u \leqq K_u$, et l'excès de a' sur le premier élément de u^{k_u} est numériquement inférieur au même excès pour u^{k_u+1}, par suite et à plus forte raison à $\mathrm{mod}(u-1)$ (6, VII).

A présent, faisons tendre u' vers 1; u, dont le second élément n'est pas de signe contraire à celui de $1=(1,0)$, tend aussi vers 1, $\mathrm{mod}(u-1)$, vers zéro, et aussi, à plus forte raison, la différence entre les premiers éléments de a et u^{k_u}; u^{k_u} tend donc vers a, puisque les seconds éléments de ces quantités sont tous deux positifs (6, V).

Si χ_u, ρ_u désignent le quotient et le reste de la division de k_u par m, on a

$$u^{m\chi_u} = \frac{u^{k_u}}{u^{\rho_u}},$$

et $\lim u^{\rho_u} = 1$, parce que l'entier ρ_u ne peut surpasser le nombre fixe m; $u^{m\chi_u}$ a donc aussi a pour limite (2).

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les valeurs successives que prend u^{χ_u} quand u', avec u, tend vers 1. Quel que soit n, les termes de la progression géométrique

$$(7) \qquad \alpha_n^0 = 1,\ \alpha_n,\ \alpha_n^2,\ \ldots,\ \alpha_n^m$$

ont, comme ceux des progressions analogues à (6) dont ils font partie, leurs modules égaux à 1, leurs éléments positifs à partir de ceux de α_n,

les premiers décroissant, les seconds croissant, et, pour n infini, on a, comme nous venons de le voir,

$$\lim \alpha_n^m = a.$$

Soit maintenant $\alpha_0 = (\alpha'_0, \alpha''_0)$ une quantité invariable de module 1 et à éléments positifs dont le premier satisfait à l'inégalité

$$\alpha'_0 > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-a'}{m}\right)^2;$$

d'où $\operatorname{mod}(\alpha_0 - 1) < \frac{1-a'}{m}$ à cause de $\operatorname{mod}(\alpha_0 - 1) = \sqrt{2(1-\alpha'_0)}$. Comme les premiers éléments des termes de la progression

(8) $$\alpha_0^0 = 1,\ \alpha_0,\ \alpha_0^2,\ \ldots,\ \alpha_0^m$$

décroissent à partir de 1 par degrés égaux numériquement à $\operatorname{mod}(\alpha_0 - 1)$ au plus et, par suite, inférieurs à $\frac{1-a'}{m}$, ils seront tous algébriquement supérieurs à a', partant positifs; de plus leurs seconds éléments seront également positifs et par suite croissants (6, VII).

Le premier élément de α_n finit par rester inférieur à celui de α_0, car autrement (6, VIII) celui de α_n^m ne finirait pas non plus par tomber au-dessous de celui de α_0^m; il ne tendrait pas vers a' qui est inférieur au premier élément de α_0^m et, contrairement à ce qui a lieu, α_n^m n'aurait pas a pour limite. On en conclut que les éléments des quantités (7) finissent tous par rester les premiers inférieurs, les seconds supérieurs aux éléments de noms semblables dans les termes de mêmes rangs de la suite (8).

Finalement, des relations

$$a = \alpha_n^m + \varepsilon_n = \alpha_{n+p}^m + \varepsilon_{n+p},$$

où ε_n, ε_{n+p} tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, on tire

(9) $$\alpha_{n+p} - \alpha_n = -\frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{\alpha_{n+p}^{m-1} + \alpha_{n+p}^{m-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_n^{m-1}}.$$

Chaque terme du dénominateur qui est de la forme $\alpha_{n+p}^r\,\alpha_n^s$, où $r + s = m - 1$, est le produit de deux facteurs dont les éléments sont positifs et finissent par rester, les premiers inférieurs, les seconds su-

périeurs aux éléments semblables et aussi positifs du produit $\alpha_0^r \alpha_0^s = \alpha_0^{m-1}$. Il en résulte (6, VI) que les éléments de ce terme finissent également par être constamment le premier inférieur, le second supérieur aux éléments semblables de α_0^{m-1}. En appelant donc A″ le second élément de α_0^{m-1}, celui du dénominateur et, *a fortiori*, son module finiront par rester supérieurs à m A″.

A partir de ce moment, la relation (9) donne

$$\mathrm{mod}(\alpha_{n+p} - \alpha_n) < \frac{\mathrm{mod}(\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n)}{m\,\mathrm{A}''},$$

d'où

$$\lim(\alpha_{n+p} - \alpha_n) = 0,$$

quand n augmente indéfiniment, quelque relation que l'on puisse établir entre p et cet indice. On en conclut (3) que α_n tend vers une certaine limite α de module 1 comme α_n, et qui est racine de l'équation (5) à cause de $\alpha^m = \lim \alpha_n^m = a$ (2).

8. L'équation (5) possède d'autres racines, comme nous le verrons plus loin, mais celle-ci s'en distingue par des particularités qu'il faut noter.

Les termes de la progression géométrique

$$(10) \qquad \alpha^0 = 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^m = a,$$

limites des termes correspondants de la suite (7), ont comme eux des éléments non négatifs et α', premier élément de α, est au plus égal à α'_0, comme limite de celui de α_n qui finit, ainsi que nous l'avons reconnu, par rester inférieur à cette quantité. Les degrés de décroissance des premiers éléments des quantités (10) sont au moins égaux numériquement à $1 - \alpha'$ (6, VII) et par suite à $1 - \alpha'_0$ qui n'est certainement pas supérieur à $1 - \alpha'$. Il en résulte que, dans la suite (10), les premiers éléments décroissent bien réellement de 1 à a', les seconds croissant de 0 à a'' et tous restant positifs, en particulier ceux de α.

On remarquera, en outre, que l'équation (5) n'a aucune racine de module 1 et à éléments positifs dont le premier surpasse α'. Effectivement, en appelant β une racine de cette espèce, les termes de la progression

$$\beta^0 = 1,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^m$$

auraient tous des éléments non négatifs et les premiers (à partir de β) supérieurs à ceux des termes correspondants de la suite (10) (6, VIII). Le premier élément de β^m serait donc supérieur, partant non égal à celui de $\alpha^m = a$.

Racines de l'équation $x^m = 1$.

9. *En appelant* $\iota = (\iota', \iota'')$ *la racine spéciale de l'équation*

$$x^m = i,$$

dont nous avons implicitement constaté l'existence aux n^{os} 7, 8, *les* $4m$ *quantités de module* 1

$$(1)\qquad \begin{cases} \iota, \iota^2, \ \ldots, \iota^m = i, \\ \iota^{m+1}, \ \ldots, \iota^{2m} = i^2 = -1, \\ \iota^{2m+1}, \ldots, \iota^{3m} = i^3 = -i, \\ \iota^{3m+1}, \ldots, \iota^{4m} = i^4 = 1 \end{cases}$$

sont distinctes et constituent l'ensemble des racines de l'équation

$$(2)\qquad x^{4m} = 1.$$

Dans la première ligne du tableau (1) les éléments ne sont jamais négatifs et vont les premiers en décroissant de ι' à 0, premier élément de $\iota^m = i = (0, 1)$, les seconds en croissant de ι'' à 1, second élément de i (8). Deux termes quelconques de cette ligne ne peuvent donc être égaux.

En posant généralement $\iota^k = (\iota'_k, \iota''_k)$, on a

$$\begin{aligned} \iota^{m+q} &= \iota^m \ \iota^q = \quad i\iota^q = (-\iota''_q, \iota'_q), \\ \iota^{2m+q} &= \iota^{2m} \iota^q = - \quad \iota^q = (-\iota'_q, -\iota''_q), \\ \iota^{3m+q} &= \iota^{3m} \iota^q = - i\iota^q = (\iota''_q, -\iota'_q). \end{aligned}$$

Ces formules évidentes, combinées avec ce que nous savons sur la première ligne de notre tableau, montrent que les éléments vont : dans la seconde ligne, le premier en décroissant de $-\iota''$ à -1, le second en décroissant aussi de ι' à 0;

Dans la troisième, le premier en croissant de $-\iota'$ à 0, le second en décroissant de $-\iota''$ à -1;

Dans la quatrième, le premier en croissant de ι'' à 1, le second

en croissant de $-\iota'$ à o. Il résulte évidemment de cette discussion que dans les trois dernières lignes du tableau (1) les termes diffèrent aussi les uns des autres et de ceux de la première.

A cause de

$$\iota^{4m-q}\iota^{q}=\iota^{4m}=1 \quad \text{et} \quad \iota^{m+q}\iota^{m-q}=\iota^{2m}=-1,$$

on a (6, III)

$$(\iota'_{4m-q},\ \iota''_{4m-q})=(\iota'_{q},\ -\iota''_{q}),\quad (\iota'_{m+q},\ \iota''_{m+q})=(-\iota'_{m-q},\ \iota''_{m-q}).$$

Si donc on écrit les quantités (1) sur un cercle en conservant leur ordre de succession, deux d'entre elles sont conjuguées quand elles sont équidistantes de 1 (et de -1); au lieu de cela, leurs éléments sont les seconds égaux, les premiers égaux, mais de signes contraires, quand elles sont équidistantes de i (et de $-i$).

Toutes ces quantités satisfont évidemment à l'équation (2) à cause de

$$(\iota^{k})^{4m}=(\iota^{m})^{4k}=(i^{4})^{k}=1.$$

Il nous reste ainsi à constater qu'aucune autre $\theta=(\theta',\theta'')$ ne peut jouir de la même propriété.

Si d'abord le module de θ est $\gtrless 1$, on a aussi

$$\operatorname{mod}\theta^{4m}\gtrless 1,\quad \text{d'où}\quad \theta^{4m}\ \text{non}=1.$$

Si, en second lieu, θ a 1 pour module avec des éléments tous deux positifs le premier $>\iota'$, les éléments des termes de la suite

$$\theta,\ \theta^{2},\ \ldots,\ \theta^{m}$$

sont positifs et, respectivement, les premiers supérieurs, les seconds inférieurs à ceux des termes correspondants de la première ligne de notre tableau (6, VIII). En particulier, θ^{m} a des éléments positifs et ne peut ainsi se réduire à aucune des quantités i, -1, $-i$, 1; l'égalité

$$(\theta^{m}-i)(\theta^{m}+1)(\theta^{m}+i)(\theta^{m}-1)=\theta^{4m}-1=0$$

est donc impossible.

Si, en troisième lieu, θ a pour module 1 avec des éléments positifs tombant le premier entre ceux de ι^{k}, ι^{k+1} racines consécutives de la première ligne du tableau (1), le second par suite aussi entre ceux des

mêmes racines, considérons les rapports

$$\eta=(\eta', \eta'')=\theta : \iota^k, \quad \zeta=(\zeta', \zeta'')=\iota^{k+1} : \theta$$

qui, tous deux aussi, ont 1 pour module. Leurs éléments sont tous positifs; effectivement, η étant aussi égal à $(\theta', \theta'')(\iota'_k, -\iota''_k)$ (6, III), on a

$$\eta'=\theta'\iota'_k+\theta''\iota''_k, \quad \eta''=-\theta'\iota''_k+\theta''\iota'_k,$$

quantités positives parce que ι'_k, ι''_k, θ', θ'' le sont et satisfont aux inégalités $\theta'<\iota'_k$, $\theta''>\iota''_k$; de même pour ζ. On a, d'autre part,

$$\eta\zeta=\iota, \quad \text{d'où} \quad \eta'\zeta'-\eta''\zeta''=\iota'$$

et, par suite,

$$\eta'>\iota', \quad \zeta'>\iota',$$

puisque η', ζ' sont l'un et l'autre <1. On ne peut donc avoir

$$\theta^{4m}=1,$$

car autrement on aurait aussi

$$\eta^{4m}=\theta^{4m} : \iota^{4mk}=1,$$

et l'équation (2) admettrait une racine η ayant 1 pour module avec deux éléments positifs, le premier $>\iota'$, ce qui ne peut être comme nous venons de le voir.

Si enfin θ est une quantité de module 1 ayant des éléments l'un négatif, l'autre positif ou négatif, on peut évidemment poser

$$\theta=\theta_0 i \quad \text{ou} \quad =\theta_0\times(-1) \quad \text{ou} \quad \theta_0\times(-i),$$

θ_0 désignant quelque quantité de module 1 à éléments positifs, et θ_0 ne peut figurer dans la première ligne du tableau (1), sans quoi θ coïnciderait avec l'une des racines des trois dernières lignes. On a ainsi

$$\theta_0^{4m} \text{ non } =1, \quad \text{d'où aussi} \quad \theta^{4m} \text{ non } =1,$$

à cause de l'égalité évidente

$$\theta^{4m}=\theta_0^{4m}.$$

10. *En posant $\iota^4=\nu$, les racines de l'équation*

(3) $$x^m=1$$

II. *Les racines* $1, \upsilon, \upsilon^2, \ldots$ *et* $\upsilon^{\frac{m-1}{2}} = \iota^{2m-2}$ *si* m *est impair, ou* $\upsilon^{\frac{m}{2}} = \iota^{2m} = -1$ *si* m *est pair, ont leurs seconds éléments positifs ou du moins non négatifs, et leurs premiers éléments vont sans cesse en décroissant. Les racines* $1, \upsilon^{m-1}, \upsilon^{m-2}, \ldots$ *et* $\upsilon^{\frac{m+1}{2}}$, *si* m *est impair ou* $\upsilon^{2m} = -1$, *sont respectivement conjuguées aux précédentes.*

Tout ceci résulte de l'étude que nous avons faite du tableau (1).

III. Cette racine υ, dont les m premières puissances donnent ainsi l'ensemble de toutes les racines et dont aucune puissance d'exposant $< m$ n'est égale à 1, est ce que l'on nomme une racine *primitive* de l'équation (3). Il y a d'autres racines primitives, mais celle-ci se distingue d'elles et de toutes les racines par cette particularité que *de toutes les racines à seconds éléments positifs, elle est celle dont le premier élément est le plus grand,* ou bien encore *dont la différence à l'unité a le plus petit module.*

Effectivement, si $\theta = (\theta', \theta'')$ est une quantité de module 1, le carré de mod $(\theta - 1)$ se réduit à $2(1 - \theta')$ et décroît ainsi toujours quand θ' augmente.

IV. *La racine* $\upsilon^{m-1} = \upsilon^{-1}$ *conjuguée de* υ *est également primitive,* car ses puissances fournissent aussi, quoique dans l'ordre circulaire inverse, toutes les racines de notre équation.

Son premier élément est égal à celui de υ et par suite le module de son excès sur l'unité est égal à mod $(\upsilon - 1)$. Elle ne diffère de υ que par le signe du second élément, qui pour elle est négatif.

V. Les racines (4) ayant 1 pour module commun *se notent graphiquement par des points situés tous sur la circonférence qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon.*

La distance de deux points correspondant à des racines contiguës est constante et égale à

$$\operatorname{mod}(\upsilon - 1) = \operatorname{mod}(\upsilon^{-1} - 1).$$

On a effectivement

$$\operatorname{mod}(\upsilon^{k+1} - \upsilon^k) = \operatorname{mod}\upsilon^k . \operatorname{mod}(\upsilon - 1) = \operatorname{mod}(\upsilon - 1).$$

à $1 - \iota'$ (6, VII). On a donc

$$1-\iota' < \frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad \lim \iota' = 1 = \lim \iota = \lim \iota^{4} = \lim \varphi,$$

parce que ι conserve 1 pour module (6, v).

13. *Chaque racine principale de l'équation* (3) *est la* $q^{\text{ième}}$ *puissance de la racine de même nom de l'équation*

$$x^{qm} = 1.$$

En appelant, par exemple, φ la racine principale directe de cette dernière équation et en raisonnant comme nous l'avons fait pour les équations (2) et (3), on aperçoit facilement que les racines de l'équation (3) sont celles des puissances

$$\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{qm}$$

dont les exposants sont multiples de q et que, parmi les puissances de cette espèce dont les seconds éléments sont positifs, φ^q est celle dont le premier élément est le plus grand.

Racines d'une équation binôme quelconque.

14. *Quelle que soit* $A = (A', A'')$ *l'équation binôme*

$$(1) \qquad x^m = A$$

possède au moins une racine.

Cette proposition a déjà été établie dans le cas où A est une quantité réelle $\geqq 0$ (4) et dans celui où, étant imaginaire, elle a 1 pour module avec des éléments non négatifs (7). Il nous reste donc à examiner seulement les cas suivants :

1° Si A se réduit à $-1 = i^2$ ou à $-i = i^3$, le carré ι^2 ou le cube ι^3 de la racine ι de l'équation (2) du n° 9, ou même de toute autre racine de cette équation, satisfera évidemment à celle dont il s'agit.

2° En supposant toujours $\operatorname{mod} A = 1$, trois cas peuvent encore se

Ces racines se notent donc graphiquement par des points tous situés sur la circonférence qui a l'origine pour centre et r pour rayon.

La distance de deux points qui correspondent à deux racines contiguës de la suite (2) écrite circulairement est constante et égale à r mod$(\upsilon - 1)$ à cause de

$$\rho\upsilon^{k+1} - \rho\upsilon^{k} = \rho\upsilon^{k}(\upsilon - 1).$$

En les joignant donc deux à deux dans l'ordre où les racines sont écrites, on obtient un polygone équilatéral, partant régulier, puisqu'il est inscrit dans une circonférence.

SUR LES

FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES

PROVENANT

DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES,

PAR M. ÉMILE PICARD,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

On sait que les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞, satisfont à une équation linéaire du second ordre E; c'est, aux notations près, l'équation qui donne la série hypergéométrique. Dans son célèbre Mémoire sur l'intégration algébrique de cette équation (*Journal de Crelle*, t. 75), M. Schwarz signale incidemment un cas particulier remarquable: c'est celui où les trois expressions

$$\lambda+b_1-1,\quad \lambda+b_2-1,\quad b_1+b_2-1$$

seraient toutes trois égales respectivement à l'inverse d'un nombre entier positif; dans ce cas, si l'on désigne par ω_1 et ω_2 deux intégrales de l'équation E, la relation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=z$$

donnera pour x une fonction *uniforme* de z. Ces fonctions, définies seulement à l'intérieur d'un cercle, rentrent dans la classe de ces fonctions uniformes d'une variable, que M. Poincaré a désignées sous le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Envisageons maintenant les intégrales hypergéométriques de deux variables

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞.

Ces fonctions de x et y satisfont à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes; c'est ce qu'on peut voir dans mon travail sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann, relatif aux séries hypergéométriques (*Annales de l'École Normale*, 1881), et, en se plaçant à un autre point de vue, M. Appell a aussi rencontré ce système S d'équations aux dérivées partielles dans son Mémoire sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Journal de Mathématiques*, 1881).

Désignons par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions linéairement indépendantes du système S et formons les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=z, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1}=t.$$

Je me suis proposé de rechercher les cas analogues à ceux de M. Schwarz, où ces deux équations donnent pour x et y des fonctions *uniformes* de z et t. Ces cas sont ceux où, considérant deux quelconques des quantités

$$\lambda, \quad \mu, \quad b_1 \quad \text{et} \quad b_2$$

soit, par exemple, λ et b_1, la différence

$$\lambda+b_1-1$$

est égale à l'inverse d'un nombre entier positif; de plus, si l'on prend trois quelconques des mêmes quantités, soit, par exemple, λ, μ et b_1, la différence

$$2-\lambda-\mu-b_1$$

sera égale encore à l'inverse d'un nombre entier positif.

Les fonctions uniformes x et y de z et de t, données alors par les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=z, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1}=t,$$

ne sont pas définies pour toute valeur de z et de t. On peut choisir ω_1, ω_2 et ω_3, de telle sorte que le domaine dans lequel elles sont déterminées soit l'intérieur de l'hypersphère

$$z'^2 + z''^2 + t'^2 + t''^2 = 1,$$

en posant

$$z = z' + iz'', \qquad t = t' + it''.$$

Ces fonctions rentrent dans la classe de ces fonctions de deux variables, que j'ai appelées *hyperfuchsiennes*, et dont je me suis occupé dans différents Mémoires.

Dans la première Partie de ce travail, je reprends l'étude des fonctions fuchsiennes qui proviennent de la série hypergéométrique d'une variable, en suivant une marche qui s'étendra facilement au cas des séries hypergéométriques de deux variables; c'est ce qui est développé dans la seconde Partie.

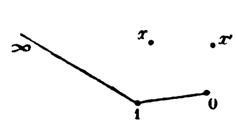
PREMIÈRE PARTIE.

1. Avant de nous occuper du cas de deux variables, nous allons nous arrêter sur les fonctions fuchsiennes qui naissent des séries hypergéométriques d'une variable. Considérons donc les expressions

$$(1) \qquad \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞. Elles satisfont à une équation linéaire du second ordre, qui est bien connue; soient ω_1 et ω_2 deux intégrales linéairement indépendantes de cette équation, et considérons le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ que nous désignerons par z. Traçons, dans

Fig. 1.



le plan de la variable x (*fig.* 1), deux coupures, dont l'une va du point 0 au point 1, l'autre du point 1 à l'infini. Si l'on assujettit x à ne pas

franchir ces coupures, le rapport z ne peut pas prendre la même valeur en deux points x et x' ou, en d'autres termes, au plan de la variable x, avec les coupures qui y sont tracées, correspondra d'une *manière uniforme*, au moyen de la relation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z,$$

une certaine portion du plan sur lequel est représentée la quantité complexe z.

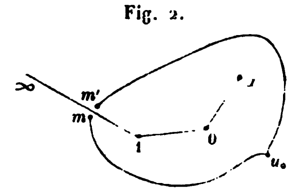
Je vais donner de ce fait une démonstration qui pourra s'étendre immédiatement aux fonctions hypergéométriques de deux variables. Nous ne considérons d'ailleurs que le cas où λ, b_1 et b_2 sont réels; de plus, nous supposons

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad \lambda > 0, \quad b_1 + b_2 + \lambda < 2;$$

ce sont les conditions pour que toutes les intégrales (1) aient un sens.

Aux deux coupures déjà tracées (0, 1), (1, ∞), ajoutons la coupure

Fig. 2.



(x, 0) ne rencontrant pas les précédentes, et supposons-les tracées sur le plan d'une variable u (*fig.* 2); envisageons l'intégrale

$$U = \int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du = \int_{u_0}^{u} dv$$

en posant

$$dv = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où nous supposerons que le chemin d'intégration ne traverse aucune des coupures.

Nous devons chercher quelles relations il y a entre les valeurs de U en des points correspondants situés de part et d'autre d'une même coupure; soient d'abord m et m' deux points sur (1, ∞): on aura,

en désignant par U′ la valeur de U en m',

$$U' = U e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

ou

$$V' = V e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}, \tag{1}$$

en posant

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On aura de la même manière, en considérant la seconde coupure (o, 1),

$$U' = U e^{(\lambda+b_1)2\pi i} + e^{(\lambda+b_1)2\pi i}(e^{2i\pi b_2} - 1) \int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{2\pi i(\lambda+b_1+b_2)}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

et, par suite,

$$V' = e^{(\lambda+b_1)2\pi i} V + e^{2\pi i(\lambda+b_1)}(e^{2\pi i b_2} - 1). \tag{2}$$

Considérons enfin la troisième coupure (o, x),

$$U' = U e^{\lambda 2\pi i} + (e^{(\lambda+b_1)2\pi i} - e^{2\lambda\pi i}) \int_{u_0}^{0} dv$$
$$+ (e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} - e^{(\lambda+b_1)2\pi i}) \int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

et, par conséquent,

$$V' = V e^{2\pi i\lambda} + \frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv} (e^{(\lambda+b_1)2\pi i} - e^{\lambda 2\pi i}) + (e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} - e^{2\pi i\lambda})$$

ou

$$V' = e^{2\pi\lambda i} V + (e^{2\pi(\lambda+b_1)i} - e^{2\pi\lambda i}) z + (e^{2\pi(\lambda+b_1+b_2)i} - e^{2\pi\lambda i}), \tag{3}$$

en posant

$$\frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv} = z.$$

On remarquera que le numérateur et le dénominateur sont deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique.

Ceci posé, nous allons employer un mode de raisonnement analogue à celui dont a fait usage M. Poincaré dans les considérations qu'il a présentées sur les fonctions inverses, auxquelles on est conduit quand on regarde les coefficients d'une équation linéaire comme fonctions de ses invariants fondamentaux (*Sur les groupes des équations linéaires*, *Acta mathematica*, t. IV, p. 216).

Reprenons la fonction de u

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{x} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{m_0}^{\infty} dv}.$$

On a tracé, dans le plan des u, comme il a été dit, les coupures $(\infty, 1)$, $(1, 0)$, $(0, x)$; quand u parcourra son plan, sans franchir ces coupures, V parcourra une certaine région R. Cette région sera analogue aux polygones générateurs des groupes fuchsiens, mais elle pourra se recouvrir partiellement elle-même. Elle aura six côtés et ses sommets sont faciles à obtenir; ce sont, d'une part :

$$(1^\circ) \qquad 0, \quad 1, \quad 1+z, \quad \frac{e^{2i\pi(\lambda+b_1)} - e^{2i\pi\lambda}}{1 - e^{2i\pi\lambda}}\, z + \frac{e^{2\pi i(\lambda+b_1+b_2)} - e^{2i\pi\lambda}}{1 - e^{2i\pi\lambda}}$$

et, d'autre part,

$$(2^\circ) \qquad 0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3,$$

a_3 étant égal au dernier terme de la ligne précédente, tandis que a_1 est le transformé de 1 par la substitution (1), et a_2 le transformé de $1+z$ par la substitution (2). On voit que ces sommets et les substitutions (1), (2) et (3) ne dépendent que du rapport z. La région R n'est pas entièrement déterminée quand on se donne z; on peut en effet faire varier la forme des côtés (1) et il y a alors des variations correspondantes pour les côtés conjugués (2). Ceci posé, il n'y a plus rien à changer au raisonnement fait par M. Poincaré (p. 220 et 221 du Mémoire cité); nous allons le reproduire succinctement.

On peut toujours tracer les coupures, de manière que les côtés (1)

aient telle forme que l'on veut, et par suite, s'il existe deux fonctions V, correspondant à deux valeurs *différentes* x_1 et x_2 *de* x, et pour lesquelles le rapport de z, évalué comme nous l'avons indiqué, aurait la même valeur, on peut toujours supposer que la région R est la même dans l'un et l'autre cas.

Soient donc V_1 et V_2 les deux valeurs de V correspondant à x_1 et à x_2; on montre de suite que ces deux fonctions de u, qui correspondent à la même région R, doivent être liées par une relation de la forme

$$AV_1V_2 + BV_1 + CV_2 + D = 0,$$

et, comme elles ont la même valeur pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, on en conclut que

$$V_1 = V_2;$$

par suite on aura nécessairement $x_1 = x_2$, comme nous voulions l'établir.

2. Nous voulons maintenant considérer le cas, signalé par M. Schwarz, où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique conduit à une fonction uniforme. Reprenons donc l'équation du second ordre

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} & x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}[b_1(x-1) + b_2x + (\lambda-2)(2x-1)] \\ & \qquad\qquad + (\lambda-1)(b_1+b_2+\lambda-2)y = 0, \end{aligned} \right.$$

à laquelle satisfont les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du \quad (g, h = 0, 1, x, \infty).$$

On sait que, dans le voisinage de $x = 0$, on peut trouver deux intégrales de l'équation E, dont le rapport dans le voisinage de l'origine peut se mettre sous la forme

$$x^{\lambda+b_1-1}\,P(x),$$

$P(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x = 0$.

De même, pour $x = 1$, on aura

$$(x-1)^{\lambda+b_2-1}\,Q(x)$$

et enfin, pour $x = \infty$,

$$x'^{b_1+b_2-1}\,R(x'), \qquad \text{en posant} \qquad x = \frac{1}{x'}.$$

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, il faudra que les trois nombres

$$\lambda + b_1 - 1, \quad \lambda + b_2 - 1, \quad b_1 + b_2 - 1$$

soient les inverses de nombres entiers. Soient donc

$$\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{m}, \qquad \lambda + b_2 - 1 = \frac{1}{n}, \qquad b_1 + b_2 - 1 = \frac{1}{p},$$

m, n, p étant trois entiers que nous supposons *positifs*. Nous aurons donc

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right).$$

Nous voulons d'ailleurs, d'après ce qui a été dit au n° 1, que

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad b_1 + b_2 + \lambda > 2;$$

les trois premières conditions sont remplies, quels que soient les entiers positifs m, n, p, et, quant à la dernière, elle revient à

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1,$$

que nous supposerons satisfaite.

Quand λ, b_1, b_2 ont les valeurs écrites ci-dessus, l'inversion du quotient de deux intégrales conduit à une fonction uniforme; c'est ce que nous allons maintenant établir. Reportons-nous à cet effet aux substitutions fondamentales du groupe, telles que je les ai données récemment (*Bulletin des Sciences mathématiques*, août 1885). En désignant par ω_1 et ω_2 deux solutions convenables de l'équation (E), les deux

substitutions fondamentales du groupe peuvent s'écrire

$$(S_1)\qquad [\omega_1,\ \omega_2,\ e^{-2(b_1+\lambda)i\pi}\,\omega_1,\ \omega_2+(e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}-e^{-2\lambda i\pi})\,\omega_1],$$
$$(S_2)\qquad [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1+(e^{2(b_2+\lambda)i\pi}-e^{2\lambda i\pi})\,\omega_2,\ e^{2(b_2+\lambda)i\pi}\,\omega_2].$$

Si nous posons $\frac{\omega_1}{\omega_2}=z$, nous aurons pour z les substitutions

$$(\sigma_1)\qquad \left[z,\ \frac{e^{-2(b_1+\lambda)i\pi}z}{1+(e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}-e^{-2\lambda i\pi})\,z}\right],$$
$$(\sigma_2)\qquad [z,\ e^{-2(b_2+\lambda)i\pi}z+(1-e^{-2b_2\pi i})].$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver un cercle qui est transformé en lui-même par les substitutions (σ_1) et (σ_2). On peut mettre l'équation d'un cercle sous la forme

$$(C)\qquad A zz_0+Bz+B_0z_0+C=0,$$

où A et C sont réels, B et B_0 étant imaginaires conjuguées ainsi que z et z_0.

En écrivant que ce cercle est transformé en lui-même par la substitution (σ_1), on obtient les deux équations

$$B(1-e^{-2b_1\pi i})+B_0(1-e^{2b_1\pi i})+C(e^{-2b_1\pi i}-1)(e^{2b_1\pi i}-1)=0,$$
$$B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i}-1)=C(1-e^{2b_1\pi i}),$$

et l'on voit que la première est une conséquence de la seconde.

Pareillement, la substitution (σ_2) conduit aux deux équations

$$B(1-e^{-2b_2\pi i})+B_0(1-e^{+2b_2\pi i})+A(1-e^{-2b_2\pi i})(1-e^{2b_2\pi i})=0,$$
$$B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i}-1)=A(1-e^{2b_2\pi i}),$$

qui se réduisent aussi à la seconde.

On a donc seulement les *deux* équations de condition

$$(1)\qquad \begin{cases} B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i}-1)=A(1-e^{2b_2\pi i}),\\ B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i}-1)=C(1-e^{2b_1\pi i}).\end{cases}$$

Il faut qu'on puisse satisfaire à ces équations en prenant A et C *réels*. On voit de suite qu'il en est ainsi, car on peut remplacer la seconde équation par la suivante

$$A=\frac{(e^{2\pi b_1 i}-1)(e^{2\pi(b_2+\lambda)i}-1)}{(e^{2\pi b_2 i}-1)(e^{2\pi(b_1+\lambda)i}-1)}\,C,$$

et l'on s'assure sans peine que le coefficient de C est *réel*, en remarquant qu'il ne change pas quand on change i en $-i$.

On aura par suite le cercle ainsi complètement déterminé; nous devons chercher si ce cercle est réel. Il faut pour cela que

$$BB_0 - AC > 0;$$

en faisant le calcul, on ramène immédiatement cette condition à l'inégalité

$$(e^{2\pi\lambda i} - 1)(e^{2\pi b_2 i} - e^{-2\pi(b_1+\lambda)i})(1 - e^{2\pi b_1 i})(1 - e^{-2\pi b_2 i}) > 0.$$

Le premier membre est une fonction réelle de λ, soit $\varphi(\lambda)$, qui se discute facilement; laissons b_1 et b_2 fixes, et faisons varier λ entre

$$0 \quad \text{et} \quad 2 - b_1 - b_2,$$

cette dernière limite étant inférieure à l'unité, puisque $b_1 + b_2 = 1 + \frac{1}{p}$.

La fonction $\varphi(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 2 - b_1 - b_2$, et elle ne s'annule pas dans l'intervalle. Il nous suffira, par suite, d'avoir son signe pour une valeur intermédiaire. Or on a

$$0 < 1 - b_1 < 2 - b_1 - b_2;$$

nous pouvons donc substituer $\lambda = 1 - b_1$ et l'on voit que pour cette valeur l'inégalité (2) est vérifiée.

Il existe donc un cercle réel C, *que les substitutions* (σ_1) *et* (σ_2) *transforment en lui-même*, et ce cercle est donné par les relations (1).

3. Reprenons maintenant l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où λ, b_1 et b_2 ont les valeurs indiquées. Cette intégrale sera une intégrale abélienne correspondant à la relation algébrique entre v et u

$$v = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}.$$

Elle sera d'ailleurs de première espèce, puisqu'elle reste finie pour toute valeur de u. Les périodes de cette intégrale peuvent s'exprimer

linéaire faite sur z permet toujours de passer de l'extérieur d'un cercle à l'intérieur.

4. Ceci posé, nous pouvons aborder l'inversion de la relation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z$$

et montrer que cette équation donne pour x une fonction uniforme de z. Traçons dans le plan des x les deux coupures $(0, 1)$ et $(1, \infty)$. Il a été montré (n° 1) que, quand x décrit son plan sans traverser les coupures, le rapport z décrit dans son plan un polygone correspondant, et ce polygone *ne se recouvre pas lui-même*. Ce polygone P a quatre côtés, et, en disposant convenablement des coupures $(0, 1)$ et $(1, \infty)$, on peut évidemment supposer que ce polygone est convexe. Soient α, β, β' et γ les sommets de ce quadrilatère; les côtés $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ sont conjugués, ainsi que les deux côtés $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma$; ces couples de côtés correspondent aux deux bords de l'une et l'autre coupure. On peut prendre pour les deux substitutions fondamentales la substitution qui transforme $\alpha\beta'$ en $\alpha\beta$ et celle qui transforme $\gamma\beta'$ en $\gamma\beta$; désignons ces deux substitutions par Σ_1 et Σ_2. La substitution Σ_1 équivaut à une rotation de x autour du point zéro; le multiplicateur de cette substitution est donc égal à $e^{2\pi i(\lambda+b_1-1)}$, c'est-à-dire à $e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Donc, si nous effectuons m fois de suite la substitution Σ, le polygone P se transformera en P_1, P_2, ..., P_{m-1} et le polygone P_{m-1} se confondra avec le polygone P; d'ailleurs ces polygones n'auront que des côtés communs, mais ils n'auront pas d'*aire* commune; il en sera de même pour la substitution Σ_2, dont le multiplicateur est égal à $e^{2\pi i(b_1+b_2+1)}$ ou $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, et qui donnera les polygones Q_1, Q_2, ..., Q_{p-1}.

Nous venons d'étudier la disposition des polygones autour des points α et γ; examinons maintenant les sommets β et β'. La substitution Σ_2, qui transforme $\gamma\beta'$ en $\gamma\beta$, transforme P en Q_1; puis, en effectuant sur Q_1 la substitution Σ_2^{-1} qui transforme $\alpha\beta$ en $\alpha\beta'$, nous transformons le polygone Q_1 en un nouveau polygone P'_1, et la substitution résultant de ces deux substitutions, qui équivaut manifestement à une rotation de x autour du point 1, laisse le sommet β invariable et son mul-

tiplicateur est $e^{(\lambda+b_3-1)2\pi i}$ ou $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. On aura donc ainsi autour du sommet β un ensemble de n couples de polygones, tels que P et Q_1, et ces polygones n'empiéteront pas les uns sur les autres. Il en sera de même autour du sommet β'. Le cercle C est donc couvert ainsi par un réseau de polygones : on le voit en employant le raisonnement de M. Poincaré, et il en résulte alors immédiatement que l'équation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z$$

donne pour x une fonction uniforme de z, définie seulement à l'intérieur du cercle C.

SECONDE PARTIE.

1. Nous allons maintenant nous occuper des fonctions hyperfuchsiennes auxquelles on est conduit par la considération de certaines fonctions hypergéométriques de deux variables. On sait que l'intégrale

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞ satisfait à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes [*voir* mon *Mémoire sur les séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale*, 1881)]. Nous nous bornons d'ailleurs à considérer le cas où λ, b_1, b_2 et b_3 sont réels et satisfaisant aux conditions

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad b_1 + b_2 + \lambda + \mu < 3;$$

ce sont les conditions pour que toutes les intégrales précédentes aient un sens.

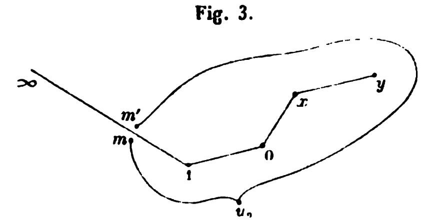
Envisageons l'intégrale

$$U = \int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du$$

et traçons dans le plan de la variable u (*fig.* 3) les coupures $(\infty, 1)$,

$(1, 0)$, puis $(0, x)$ et (x, y) et nous supposerons que le chemin d'intégration ne traverse aucune coupure.

Fig. 3.



Nous allons d'abord chercher quelles relations il y a entre les valeurs de U en des points correspondants situés de part et d'autre d'une même coupure; c'est une étude toute semblable à celle que nous avons faite au n° 1. Soient d'abord m et m' deux points sur la coupure $(\infty, 1)$; on aura, en désignant par U' la valeur de U en m',

$$U' = U\, e^{(\lambda+b_1+b_2+b_3)2\pi i} + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2+\mu)2\pi i})\int_{u_0}^{\infty} dv,$$

en écrivant, pour abréger,

$$dv = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}$$

et

$$V' = V e^{(\lambda+b_1+b_2+\mu)2\pi i}, \tag{1}$$

en posant

$$V = \frac{\displaystyle\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\displaystyle\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On aura de la même manière, en considérant la seconde coupure $(1, 0)$

$$U' = U e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i} + e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i}(e^{2i\pi b_2} - 1)\int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)})\int_{u_0}^{\infty} dv,$$

et l'on aura pour V la substitution

$$V' = e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i}\, V + e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)}(e^{2\pi i b_2} - 1). \tag{2}$$

Considérons ensuite la coupure $(0, x)$; elle conduit à la substitution

$$V' = e^{2\pi i(\lambda+\mu)}\, V + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)} - e^{2\pi i(\lambda+\mu)})z + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)} - e^{2\pi(\lambda+\mu)i}), \tag{3}$$

où

$$z = \frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv};$$

ces résultats sont entièrement semblables à ceux du n° 1 du Chap. I. Il nous reste à calculer la substitution correspondant à la coupure (x, y). On aura

$$\begin{aligned} U' - U e^{2\pi i\lambda} + e^{2\pi i\lambda}(1 - e^{2\pi i\mu}) \int_{u_0}^{x} dv + e^{2\pi i(\lambda+\mu)}(1 - e^{2\pi i b_1}) \int_{u_0}^{0} dv \\ + e^{2i\pi(\lambda+\mu+b_1)}(1 - e^{2\pi i b_2}) \int_{u_0}^{1} dv + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)} -) \int_{u_0}^{\infty} dv = 0, \end{aligned}$$

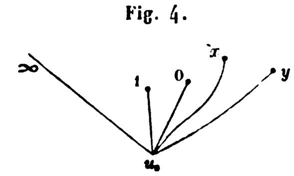
et il en résultera pour V une substitution (4), que je n'écris pas pour abréger, mais dont les coefficients seront manifestement des polynômes du premier degré en z et en t, en posant

$$t = \frac{\int_{u_0}^{x} dv - \int_{u_0}^{0} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On remarque que, dans z et t, le dénominateur commun et les deux numérateurs sont trois intégrales linéairement indépendantes du système S d'équations linéaires, dont j'ai parlé au début.

Il importe de ne pas oublier comment sont évaluées les intégrales

Fig. 4.



définies qui figurent dans z et dans t; on peut dire qu'elles sont évaluées le long de chemins *se succédant autour du point* u_1 (*fig.* 4) *dans l'ordre*

$$u_0 x, \quad u_0 y, \quad u_0 0, \quad u_0 1, \quad u_0 \infty.$$

2. Nous pouvons maintenant établir une proposition analogue à celle que nous avons démontrée, au début de la première Partie. Il n'est pas possible, les intégrales étant évaluées comme il vient d'être indiqué, que l'on ait, pour deux systèmes différents de valeurs de x et y, les mêmes valeurs pour z et pour t. Ce théorème se démontrera absolument comme celui qui est relatif au cas d'une variable, en montrant que la fonction de u

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}$$

doit avoir la même valeur dans les deux cas, d'où l'on conclut l'identité des valeurs de x et y.

3. Nous voulons maintenant étudier les cas où l'inversion des quotients de trois intégrales linéairement indépendantes du système S conduit à des fonctions uniformes de deux variables indépendantes; ces cas seront les analogues de ceux de M. Schwarz, que nous avons étudiés dans la première Partie. En se reportant au Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale*, 1881), on voit que, dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$ (α étant une valeur quelconque différente de 0, 1, ∞), le système admet trois intégrales de la forme

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{\mu+b_1-1} P_3(x, y),$$

P_1, P_2 et P_3 étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0, y = \alpha$. Pareillement, dans le voisinage de $x = 1$, $y = \alpha$, nous aurons trois intégrales

$$Q_1(x, y), \quad Q_2(x, y), \quad (x-1)^{\mu+b_2-1} Q_3(x, y).$$

Dans le voisinage de $x = y = \alpha$, α étant toujours différent de 0, 1, ∞, on a trois intégrales de la forme

$$A_1(x, y), \quad A_2(x, y), \quad (x-y)^{\lambda+\mu-1} A_3(x, y).$$

Pareillement, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on aura

$$x^{1-\mu+1} R_1(x', y), \quad x'^{-\mu+1} R_2(x', y), \quad x'^{3-\lambda-\mu-b_1-b_2} R_3(x', y).$$

Il suit de là tout d'abord qu'il est nécessaire, pour l'inversion uniforme des quotients de deux de ces intégrales à la troisième, que

$$\mu + b_1 - 1, \quad \mu + b_2 - 1, \quad \lambda + \mu - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \lambda - b_1 - b_2$$

soient égaux à l'inverse d'un nombre entier positif; mais nous avons encore des formes toutes semblables pour les déterminations des intégrales dans le voisinage de $x = \alpha$ et de $y = 0$, 1 et ∞ ; nous en concluons que

$$\lambda + b_1 - 1, \quad \lambda + b_2 - 1, \quad 2 - \mu - b_1 - b_2$$

doivent être aussi égaux à l'inverse d'un nombre entier positif.

4. Nous supposerons donc que λ, b_1, b_2 et μ, satisfaisant d'ailleurs aux inégalités

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad b_1 + b_2 + \mu + \lambda < 3,$$

satisfassent de plus aux conditions précédentes.

Pour suivre la même marche que dans le cas d'une variable, nous aurions besoin d'avoir les substitutions fondamentales du groupe relatif au système S. Nous n'allons pas avoir besoin, toutefois, de calculer toutes ces substitutions fondamentales; laissant d'abord y constant, on a, en faisant tourner x autour des points 0, 1, y, trois substitutions. Si l'on prend trois intégrales convenables ω_1, ω_2, ω_3, j'ai donné (*Bulletin des Sciences mathématiques,* août 1885) ces trois substitutions fondamentales que je rappellerai ici :

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} \omega'_1 = e^{-2(\lambda+\mu)\pi i}\,\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_2 + \left(e^{-2(\lambda+\mu)\pi i} - e^{-2\mu\pi i}\right)\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_3; \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \qquad \begin{cases} \omega''_1 = \omega_1 + \left(e^{2(b_1+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i)}\right)\omega_2, \\ \omega''_2 = e^{2(b_1+\mu)\pi i}\,\omega_2, \\ \omega''_3 = \left(1 - e^{2i\pi\mu}\right)\omega_2 + \omega_3 \end{cases}$$

et, enfin,

$$(\Sigma_3) \qquad \begin{cases} \omega'''_1 = \omega_1 + \left(e^{2(b_2+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i}\right)\omega_2 + \left(e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{2(b_1+\mu)\pi i}\right)\omega_3, \\ \omega'''_2 = \left(1 + e^{2(b_2+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i}\right)\omega_2 + \left(e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{2(b_1+\mu)\pi i}\right)\omega_3, \\ \omega'''_3 = e^{-\pi b_1 i}\left(e^{2\pi\mu i} - 1\right)\omega_2 + e^{2\pi\mu i}\,\omega_3. \end{cases}$$

En laissant de même x constant et faisant tourner y autour des points x, o, 1, on aurait trois autres substitutions; la première n'est autre que la substitution Σ_1. Désignons les deux autres par Σ_4 et Σ_5; elles sont de forme analogue aux trois premières et peuvent s'obtenir de la même manière. Je ne les écris pas, car elles ne me seront pas utiles dans ce qui va suivre.

Continuant à suivre la même marche que dans la première Partie, nous devons montrer qu'il existe une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées u, v, w, que laissent invariable les substitutions du groupe G; soit

$$A u_0 + A' v_0 + A'' w_0 + B'' u v_0 + B''_0 u_0 v + B' u w_0 + B'_0 u_0 w + B v w_0 + B_0 v_0 w$$

une telle forme; A, A′ et A″ sont réels et les autres coefficients B, B_0, ... sont deux à deux conjugués.

Nous avons pu calculer les coefficients pour le cas de deux variables; ici, le calcul complet serait bien plus laborieux, quoique évidemment de même nature. Nous le simplifierons en démontrant d'abord indirectement l'existence d'une telle forme. Considérons, à cet effet, l'intégrale, déjà étudiée au n° 1,

$$\int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où λ, b_1, b_2 et μ sont des nombres commensurables satisfaisant aux conditions indiquées.

On peut considérer cette intégrale comme une intégrale abélienne, correspondant à la relation algébrique entre v et u,

$$v = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}.$$

Elle sera d'ailleurs de première espèce, car elle reste finie pour toute valeur de u. Les périodes de cette intégrale peuvent s'exprimer avec trois solutions linéairement indépendantes du système; soient, par exemple, les trois solutions, ω_1, ω_2, ω_3.

Les intégrales pourront se grouper, trois par trois, en expression de la forme

$$\alpha\omega_1, \quad \alpha\omega_2, \quad \alpha\omega_3,$$

où les α sont des constantes, c'est-à-dire des quantités indépendantes de x et y. En écrivant, comme au n° 3 de la première Partie, que

$$\Sigma c_{ik}(a_i b_k - a_k b_i) < 0,$$

on trouve une inégalité de la forme

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) < 0,$$

le premier membre de cette inégalité étant une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, où ω_1^0, ω_2^0 et ω_3^0 représentent les conjuguées de ω_1, ω_2 et ω_3. Les coefficients de cette forme ne dépendent ni de x ni de y.

Si l'on fait varier x et y, l'inégalité précédente ne cessera évidemment pas d'être vérifiée, et, par suite, elle sera transformée en elle-même, quand on effectuera sur ω_1, ω_2 et ω_3 une substitution quelconque du groupe G. On en conclut, en posant

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v,$$

qu'il existe une certaine *surface* S,

$$(\mathrm{S}) \quad \mathrm{A}uu_0 + \mathrm{A}'vv_0 + \mathrm{A}'' + \mathrm{B}''uv_0 + \mathrm{B}''_0 u_0 v + \mathrm{B}'u + \mathrm{B}'_0 u_0 + \mathrm{B}v + \mathrm{B}_0 v_0 = 0,$$

que transforment en elle-même les substitutions du groupe G. Cette conclusion se trouve établie pour les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2 ayant la forme indiquée; mais, ces valeurs étant en nombre quadruplement infini, il est évident que la conclusion subsiste pour toute valeur de λ, μ, b_1 et b_2.

Le calcul complet de la forme f se trouve alors bien simplifié, quand on admet l'existence de la forme. Nous écrirons la forme comme il suit

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\omega_1\omega_1^0 + \mathrm{A}'\omega_2\omega_2^0 + \mathrm{A}''\omega_3\omega_3^0 + \mathrm{B}''\omega_1\omega_2^0 \\ &\quad + \mathrm{B}''_0\omega_1^0\omega_2 + \mathrm{B}'\omega_1\omega_3^0 + \mathrm{B}'_0\omega_1^0\omega_3 + \mathrm{B}\omega_2\omega_3^0 + \mathrm{B}_0\omega_2^0\omega_3; \end{aligned}$$

la substitution (Σ_1) nous donne d'abord

$$\mathrm{B}''(e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1) = \mathrm{A}'(1 - e^{2\lambda\pi i}),$$

puis

$$B'(e^{-2(\mu+\lambda)i\pi} - 1) + B(e^{-2\mu i\pi}e^{-2\lambda i\pi} - 1) = 0;$$

la substitution (Σ_2) donne ensuite, en prenant le coefficient de $\omega_2\omega_3^0$,

$$A''(1 - e^{2i\pi\mu}) + B'(e^{2-(b_1+\mu)\pi i} - e^{2\pi\mu i}) + B(e^{2(b_1+\mu)\pi i} - 1) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$A'' = B\frac{(1 - e^{2\pi i(\mu+b_1+\lambda)})}{1 - e^{2\pi i(\mu+\lambda)}}.$$

Nous avons donc déjà les trois relations

$$B'' = A'\frac{1 - e^{2\lambda\pi i}}{e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1}, \qquad B' = B\frac{1 - e^{2\lambda\pi i}}{e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1}, \qquad A'' = B\frac{(1 - e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)})}{1 - e^{2\pi i(\lambda+\mu)}}.$$

Nous aurons, d'autre part, en comparant les coefficients de $\omega_1\omega_2^0$, après avoir fait la substitution (Σ_3),

$$A(e^{-2(b_1+\mu)\pi i} - e^{-2\mu\pi i}) + B''(e^{-2(b_1+\mu)\pi i} - 1) + B'(1 - e^{-2i\pi\mu}) = 0;$$

puis, en comparant les coefficients $\omega_1\,\omega_3^0$, après avoir fait la substitution (Σ_3),

$$\begin{aligned} &A(e^{-2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{-2(b_1+\mu)\pi i}) \\ &\quad + B''(e^{-2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{-2(b_1+\mu)\pi i}) + B'(e^{-2i\pi\mu} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Des cinq relations précédentes, on tire, en faisant $A = 1$,

$$\begin{aligned} B'' &= \frac{e^{2(b_1+b_2)\pi i} - 1}{1 - e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}}, \\ B' &= \frac{e^{2b_2\pi i} - 1}{1 - e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}}, \\ A' &= B''\frac{e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1}{1 - e^{2\lambda\pi i}}, \\ B &= B'\frac{e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1}{1 - e^{2\lambda\pi i}}, \\ A'' &= B\frac{1 - e^{2\pi(\lambda+\mu+b_1)i}}{1 - e^{2\pi i(\lambda+\mu)}}; \end{aligned}$$

ces valeurs seront bien déterminées, si aucun des dénominateurs ne s'annule; nous faisons donc les hypothèses, auxquelles nous serons,

d'ailleurs, conduit de nouveau dans un instant,

$$1 < \lambda + \mu < 2$$

et

$$1 < b_1 + b_2 + \mu < 2,$$

en excluant les cas limites où l'une ou l'autre de ces inégalités se transformerait en une égalité; il faudrait dans ces cas donner aux coefficients une forme différente.

5. Il est important d'être assuré que la forme f est *indéfinie;* car, dans le cas contraire, la *surface* (S) serait imaginaire et n'offrirait aucun intérêt. La forme f peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(\omega_1 + B''_0\omega_2 + B'_0\omega_3)(\omega_1^0 + B''\omega_2^0 + B'\omega_3^0) + \omega_2\omega_2^0(A' - B''B''_0)\\&\quad + \omega_3\omega_3^0(A'' - B'B'_0) + \omega_2\omega_3^0(B - B''_0B') + \omega_2^0\omega_3(B_0 - B''B'_0).\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que le discriminant de cette forme ne peut être nul; si, en effet, ce discriminant était nul, on pourrait, par une substitution linéaire, réduire la forme ternaire en une forme binaire

$$F(U, V, U_0, V_0),$$

et cette forme se transformerait en elle-même par toute substitution du groupe. Il faudrait donc que ces substitutions transformassent U et V en des expressions linéaires et homogènes de U et V, et que, par suite, le système S ne fût pas irréductible. Or ce système est certainement irréductible, pour toutes les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2, *comprises entre zéro et un*, et satisfaisant aux inégalités

$$\begin{array}{lll}\lambda + b_1 > 1, & \mu + b_1 > 1, & \lambda + \mu > 1,\\ \lambda + b_2 > 1, & \mu + b_2 > 1, & \lambda + b_1 + b_2 + \mu < 3,\\ \mu + b_1 + b_2 < 2, & \lambda + b_1 + b_2 < 2, & \end{array}$$

qui sont vérifiées pour les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2, que nous avons à considérer. Cela posé, la forme f sera certainement indéfinie, si le discriminant de la forme binaire en ω_2 et ω_3, qui suit le premier terme

$$(\omega_1 + B''_0\omega_2 + B'_0\omega_3)(\omega_1^0 + B''\omega_2^0 + B'\omega_3^0),$$

est positif. Or ce discriminant ne peut jamais s'annuler pour les valeurs

de λ, μ, b_1 et b_2 satisfaisant aux inégalités précédentes, car le discriminant de f serait alors nul, ce que nous venons de voir être impossible. Il sera donc suffisant de considérer un cas particulier; or, si b_1 et b_2 satisfont à la condition

$$b_1 + b_2 = 1,$$

on a $B'' = 0$, $A' = 0$, et le discriminant se réduit à BB_0 et est, par suite, positif.

Une dernière question est à poser, relativement à l'inégalité

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) < 0,$$

où, comme nous venons de le voir, f est une forme *indéfinie*, dont le discriminant n'est pas nul. Par une substitution linéaire effectuée sur ω_1, ω_2, ω_3, cette inégalité pourrait prendre l'une ou l'autre forme

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 < 0$$

ou bien

$$UU_0 - VV_0 - WW_0 < 0,$$

et ces deux formes d'inégalité sont bien distinctes. Je dis que c'est la première forme que nous allons rencontrer ici; on doit, en effet, rencontrer toujours la même forme d'inégalité pour toutes les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2 satisfaisant aux inégalités écrites plus haut, car le passage d'une forme à l'autre correspondrait nécessairement à une forme de discriminant nul.

Nous pouvons donc considérer encore ici un cas particulier. Prenons des valeurs commensurables, pour lesquelles on ait

$$\lambda + \mu + b_1 > 2,$$

inégalité qui est incompatible avec les précédentes; désignons toujours par

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$$

le polynôme, dont j'ai (n° 5) calculé les coefficients, et qui est, d'après ce que nous venons de voir, réductible à la forme $UU_0 + VV_0 - WW_0$.

Il s'agit de savoir si l'on a l'inégalité

$$f > 0$$

ou l'inégalité

$$f < 0.$$

Or faisons tendre x et y vers zéro. On voit, avec l'hypothèse faite

$$\lambda + \mu + b_1 > 2,$$

que, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

ω_3 étant différent de zéro.

Le premier membre se réduit alors à $A''\omega_3\omega_3^0$; or on a

$$A'' = \frac{e^{2\pi(\lambda+\mu+b_1)} - 1}{1 - e^{2\lambda\pi i}} \frac{e^{2\pi b_2 i} - 1}{1 - e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}},$$

et il est facile de voir que, $\lambda + \mu + b_1$ étant supérieur à deux, on a $A'' < 0$. L'inégalité doit donc avoir la forme

$$f < 0,$$

c'est-à-dire

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 < 0.$$

6. Nous sommes donc arrivé à la conclusion suivante : on peut trouver trois intégrales ω_1, ω_2, ω_3, linéairement indépendantes (et nous avons appris à les former), pour lesquelles on a, en posant

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u,$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = v,$$

l'inégalité

$$\text{(S)} \quad A u u_0 + A' v v_0 + A'' + B'' u v_0 + B''_0 u_0 v + B' u + B'_0 u_0 + B v + B_0 v_0 < 0.$$

les coefficients ayant les valeurs données au n° 5.

En effectuant sur (u, v) une substitution linéaire (fractionnaire) convenable, on ramène cette inégalité à la forme

$$(\Sigma) \qquad UU_0 + VV_0 < WW_0,$$

à chaque point (u, v) du domaine (S) correspond un point du domaine (Σ) et réciproquement. Ceci posé, traçons, comme nous l'avons fait au n° 1, deux coupures $(1, \infty)$ et $(1, 0)$, et évaluons, comme il a été dit, les intégrales qui servent à former ω_1, ω_2 et ω_3; x et y prenant, *dans ces conditions*, toutes les valeurs possibles, les valeurs correspondantes de u et v, et, par suite, de U et V vont former un certain *domaine*, et ce *continuum* ne se recouvrira pas lui-même, d'après ce que nous avons établi au n° 2, puisque, pour deux systèmes de valeurs de x et y, on ne peut pas avoir les mêmes valeurs de u et v.

Désignons ce domaine fondamental par D; quand on fera

$$x = y$$

(cette valeur commune étant arbitraire, mais distincte de 0, 1, ∞), on obtiendra une *arête*. De même nous aurons six autres arêtes correspondant respectivement à

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = 0, \\ x = 1, & y = 1, \\ x = \infty, & y = \infty. \end{array}$$

Mais ce ne seront pas les seules arêtes du domaine D. Étudions en effet le cas où x et y tendraient simultanément vers zéro; pour cela, remarquons qu'on peut substituer aux intégrales dont nous sommes partis les intégrales

$$\int u^{b_1-1}\left(u - \frac{1}{x}\right)^{b_2-1}(u-1)^{\mu-1}\left(u - \frac{y}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

prises entre les limites 0, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x}$, ∞, quand on veut étudier seulement les rapports de ces intégrales. Nous avons donc à considérer un nouveau système S', où les variables sont maintenant $\frac{1}{x}$ et $\frac{y}{x}$; faisant la même remarque qu'au n° 3, nous supposerons donc que

$$b_1 + b_2 - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \mu - \lambda - b_1$$

sont égaux à l'inverse d'un nombre entier positif, et aux valeurs arbi-

traires du rapport $\frac{y}{x}$, quand x et y tendent vers zéro, correspond une arête du domaine D. Des considérations analogues sont applicables au cas où l'on aurait simultanément soit

$$x = y = 1,$$

soit

$$x = y = \infty.$$

et nous arrivons donc, relativement à λ, μ, b_1 et b_2, à la conclusion suivante; si l'on prend deux quelconques des quatre nombres

$$\lambda, \quad \mu, \quad b_1, \quad b_2;$$

soit, par exemple, λ et b_1, la somme

$$\lambda + b_1 - 1$$

est l'inverse d'un entier positif. On obtient ainsi six équations de condition. De même, en prenant trois quelconques des mêmes quantités, soit, pour fixer les idées, λ, b_1 et b_2, la différence

$$2 - \lambda - b_1 - b_2$$

est encore égale à l'inverse d'un nombre entier, ce qui nous donnera quatre nouvelles équations.

7. Nous allons voir maintenant qu'en supposant remplies toutes les conditions indiquées, les deux équations

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}} = z,$$
$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} = t$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de z et t.

Considérons en effet le *polyèdre* fondamental D qui vient d'être défini. Ce domaine est limité par certaines *faces*, formant un espace à trois dimensions, et l'intersection de deux faces sera une *arête*, n'ayant que deux dimensions. Or il est facile de voir que, en effectuant les

substitutions du groupe du système S, chaque arête appartiendra à un nombre limité de polyèdres, n'ayant d'autres parties communes que des faces. Prenons, par exemple, l'arête correspondant à $x=0$, y recevant une valeur arbitraire; il existe une certaine substitution transformant cette arête en elle-même, et cette substitution transformera en l'autre face une des faces passant par cette arête. Les variables étant convenablement choisies, la substitution aura la forme

$$\begin{aligned} X' &= X, \\ Y' &= e^{\frac{2i\pi}{p}} Y. \end{aligned}$$

p étant un entier positif, et cette substitution effectuée p fois de suite donnera p polyèdres, n'ayant en commun aucun *continuum* à trois dimensions. Pour d'autres arêtes, le raisonnement pourra être un peu moins simple; ainsi nous aurons pour $x=1$, y étant arbitraire, deux arêtes, suivant que x arrivera vers *un* d'un côté ou de l'autre des coupures. Ces deux arêtes se correspondent par la substitution dont nous venons de parler, et nous aurons alors à faire un raisonnement tout semblable à celui qui a été fait au n° 4 de la première Partie. Dans tous les cas, autour de toutes les arêtes ne se trouvera disposé qu'un nombre limité de polyèdres, n'ayant en commun aucun *continuum* à quatre dimensions.

Ces résultats admis, on pourra se servir des raisonnements employés par M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens; c'est ce que j'ai déjà indiqué dans mon Mémoire sur les groupes hyperabéliens (*Journal de Mathématiques*, 1885); on montre ainsi que l'hypersphère se trouve remplie par le réseau précédent des polyèdres, qui ne se recouvrent jamais eux-mêmes. Il suit bien évidemment de là que les équations

$$\begin{aligned} \frac{U}{W} &= z, \\ \frac{V}{W} &= t \end{aligned}$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de z et t.

8. Les conditions imposées aux quatre nombres λ, μ, b_1 et b_2 sont,

comme nous l'avons vu, au nombre de *dix*. Je ne m'arrêterai pas à rechercher toutes les valeurs possibles, dont le nombre est probablement assez limité, je veux seulement m'arrêter, en terminant, sur deux cas particuliers : l'un deux est fourni par

$$\lambda = b_1 = b_2 = \mu = \tfrac{2}{3},$$

pour lesquels les dix conditions sont bien vérifiées. J'ai étudié autrefois, par une méthode spéciale, ce cas particulier, comme on peut le voir dans le tome I des *Acta mathematica* (*Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires*). Dans ce cas, toutes les quantités analogues à

$$2 - \lambda - \mu - b_1$$

sont nulles. Donc, par conséquent, pour $x = 0$, $y = 0$, ou plus commodément pour $\frac{1}{x} = \infty$, $\frac{y}{x}$ étant arbitraire, les développements contiendront un terme en $\log x$, et par suite on aura un point correspondant situé nécessairement sur la surface même de l'hypersphère. Le polyèdre correspondant aura donc des *sommets* situés sur la surface de l'hypersphère limite

$$zz_0 + tt_0 = 1.$$

Prenons maintenant un autre exemple, qui va nous offrir des circonstances différentes. Soit

$$\lambda = b_1 = b_2 = \mu = \tfrac{3}{5}.$$

On a

$$b_1 + b_2 - 1 = \tfrac{1}{5}$$

et toutes les combinaisons analogues, puisque les nombres sont égaux.

Pareillement

$$2 - \lambda - b_1 + b_2 = \tfrac{1}{5};$$

par conséquent aucun des développements à employer ne contiendra de logarithmes, et nous pouvons par suite en conclure que la surface du polyèdre fondamental D n'aura aucun point commun avec la surface de l'hypersphère.

Ce cas particulier est intéressant, comme donnant précisément un exemple dans lequel le domaine fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite. Dans la classe très étendue de groupes hyperfuchsiens, où nous avait conduit la considération des formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées (*Acta mathematica*, t. V), les polyèdres fondamentaux avaient toujours un certain nombre de sommets sur l'hypersphère.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES,

PAR M. G. KOENIGS,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

I. — Introduction.

Dans le Supplément aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1884, j'ai démontré que, $\varphi(z)$ étant une fonction uniforme donnée, holomorphe dans le domaine d'un point limite x de la substitution $|z, \varphi(z)|$, la limite, pour p infini, du rapport

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

est une fonction $B(z)$, holomorphe dans le domaine du point x. Par *point limite*, j'entends un point vérifiant les conditions

$$\varphi(x) = x, \qquad \operatorname{mod}\varphi'(x) < 1,$$

et je représente par $\varphi_p(z)$ l'opération $\varphi(z)$ effectuée p fois. La fonction $B(z)$ admet le point x comme zéro simple et de plus $B'(x) = 1$. Cette même fonction vérifie l'équation

$$(\alpha) \qquad B[\varphi(z)] = \varphi'(x)\,B(z),$$

et j'ai démontré cette PROPOSITION FONDAMENTALE que, si l'on envisage l'équation fonctionnelle

$$(S) \qquad \Xi[\varphi(z)] = k\,\Xi(z),$$

où k est une constante convenable qu'il s'agit de déterminer, toute

solution de cette équation, assujettie à être holomorphe ou méromorphe au point x, ne diffère que par un facteur constant d'une puissance entière positive ou négative de $B(z)$; de plus, si n est l'exposant de cette puissance, le *multiplicateur* k a pour valeur $[\varphi'(x)]^n$.

De la fonction $B(z)$, j'ai déduit la fonction

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \varphi'(x)},$$

qui admet en x une singularité logarithmique; la fonction $b(z)$ m'a permis de former, outre l'expression générale des intégrales de l'équation (S), celle des intégrales de plusieurs autres équations fonctionnelles.

2. Je me propose d'étendre ici le rôle de la fonction $B(z)$ aux équations fonctionnelles du type

$$\text{(G)} \qquad \Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$

$$\text{(I)} \qquad \Xi_p(z) = \varphi(z),$$

$$\text{(D)} \qquad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Les solutions de l'équation (G) présentent des fonctions qui ont un point limite commun et qui donnent lieu à la même fonction limite; de ce groupe de fonctions holomorphes, on déduit un *groupe de substitutions uniformes* qui conservent une portion finie du plan. La considération de ces fonctions conduit à la démonstration de ce fait, qu'on est assuré de l'existence de p solutions holomorphes de l'équation itérative (I), chaque fois que l'équation $\varphi(z) - z = 0$ admet une racine x, pour laquelle le module de $\varphi'(x)$ n'est ni zéro ni l'unité.

Dans le Tome XVII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. Korkine s'est proposé de trouver une formule générale d'itération, qui ait un sens pour une valeur quelconque, commensurable ou non, de l'indice itératif. En admettant d'abord la possibilité de la solution, ainsi que certaines hypothèses dont la dépendance ou l'indépendance mutuelle reste problématique, cet éminent géomètre a présenté une solution de ce problème sous forme de développement en série. La voie que je suis est différente, et j'ai tâché de tout ramener à une hypothèse unique dont le sens et la généralité me paraissent très précis.

L'équation (D) n'est qu'une généralisation de l'équation (G) : sous une condition *nécessaire* des plus simples, elle admet toujours une intégrale holomorphe et même une infinité, dont l'étude conduit à considérer un quadruple groupe de fonctions, qui se reproduisent entre elles, lorsqu'on remplace dans l'une d'elles l'argument z par l'une de ces fonctions; je n'ai pas d'ailleurs cherché à approfondir davantage les propriétés de ces substitutions.

Je termine par quelques exemples simples, destinés surtout à élucider et à contrôler ces considérations générales.

Je crois devoir, avant de clore cette Introduction, mentionner le rôle important que paraissent devoir jouer dans ces recherches les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction $B(z)$.

II. — Les fonctions $Z(z, k)$.

3. J'adopte les notations et les résultats rappelés dans l'Introduction. Je me propose de chercher les fonctions qui, holomorphes en x, admettent x pour point limite, en donnant naissance à la même fonction limite $B(z)$.

Soit $Z(z)$ une telle fonction. D'après la propriété exprimée par l'équation (α), on doit avoir

$$B[Z(z)] = Z'(x)\,B(z).$$

Je dois donc recourir à l'équation suivante, où k est une constante quelconque,

$$(\lambda) \qquad B(Z) = k\,B(z),$$

et chercher si, parmi les fonctions qui se déduisent de cette équation, se trouvent des solutions du problème proposé.

Pour $z = x$, l'équation (λ) se réduit à $B(Z) = 0$, qui admet la *racine simple* $Z = x$; car $B(x) = 0$, $B'(x) = 1$. Donc l'équation (λ) définit une fonction que je désignerai par $Z(z, k)$, holomorphe dans le domaine de x et qui se réduit à x pour $z = x$.

En différentiant l'équation (λ), on trouve

$$B'(Z)\frac{dZ}{dz} = k\,B'(z).$$

Faisons $z = x$ et $Z = x$; comme $B'(x)$ n'est pas nul, il vient

$$k = \left(\frac{dZ}{dz}\right)_x = Z'(x, k),$$

ce qui fournit de k une signification très simple.

Supposons alors $\operatorname{mod} k < 1$, c'est-à-dire $\operatorname{mod} Z'(x, k) < 1$; cette condition est nécessaire et suffisante pour que x soit un point limite de $Z(z, k)$. Ainsi, *parmi les fonctions* $Z(z, k)$, *celles dans lesquelles* $\operatorname{mod} k < 1$ *admettent x comme point limite.*

L'équation (λ) donne d'ailleurs

$$B[Z(z, k)] = k B(z),$$

et, comme $k = Z'(x, k)$, cette formule, rapprochée de la *proposition fondamentale,* rapportée dans l'Introduction, montre que $B(z)$ est la fonction limite relative à $Z(z, k)$.

Ainsi, *toutes les fonctions* $Z(z, k)$, *dans lesquelles* $\operatorname{mod} k < 1$ (fonctions qui admettent x pour point limite), *donnent naissance à la même fonction limite;* de plus, *ce sont les seules qui jouissent de cette propriété.*

La fonction $\varphi(z)$ fait partie des fonctions Z; d'après nos notations et d'après l'équation (α), nous devons la représenter par le symbole $Z[z, \varphi'(x)]$. Comme elle ne joue dans le groupe aucun rôle spécial, on pourra supposer que c'est $B(z)$ que l'on s'est donné *a priori,* et que l'on détermine ensuite le groupe des fonctions Z par l'équation (λ). Il suffit que x soit un zéro simple de $B(z)$.

III. — Propriétés générales des fonctions $Z(z, k)$.

4. Les fonctions $Z(z, k)$ possèdent, *indépendamment de toute hypothèse portant sur leur paramètre k,* des propriétés générales communes que je vais établir.

Je remarque que la fonction $Z[Z(z, k'), k]$ est holomorphe dans le domaine de x; car, z se mouvant dans le domaine de x, $Z(z, k')$ se meut aussi dans le domaine de x. Mais si, dans l'équation (λ), on remplace z par $Z(z, k')$, il vient

$$B\{Z[Z(z, k'), k)]\} = k B[Z(z, k')] = kk' B(z);$$

d'où immédiatement, d'après la notation que nous avons adoptée,

$$(a) \qquad Z[Z(z, k'), k] = Z(z, kk');$$

comme on aurait aussi

$$Z[Z(z, k), k'] = Z(z, k'k) = Z(z, kk'),$$

il en résulte

$$(b) \qquad Z[Z(z, k), k'] = Z[Z(z, k'), k].$$

Deux fonctions Z *quelconques* jouissent donc de la propriété exprimée par l'équation

$$\varphi[\psi(z)] = \psi[\varphi(z)],$$

qui n'est autre que l'équation (G) (¹).

Enfin, la réitération de l'opération $Z(z, k)$ est *permise un nombre limité de fois*, autrement dit la fonction $Z_p(z, k)$, est holomorphe dans le domaine du point x; de plus, elle prend en x la valeur x. L'application répétée de la formule (a) donne alors

$$(c) \qquad Z_p(z, k) = Z(z, k^p).$$

IV. — Groupe de substitutions holomorphes.

5. Représentons par $S(k)$ la substitution qui consiste à remplacer z par $Z(z, k)$. En dehors de toute hypothèse sur k, il est toujours permis de multiplier entre elles un nombre fini de fois les substitutions $S(k)$, pourvu que l'on reste dans un domaine continu convenable autour du point x. Les formules (a), (b), (c) montrent alors que

$$S(k)\, S(k') = S(kk') = S(k')\, S(k),$$

les substitutions $S(k)$ forment donc un groupe, et deux quelconques d'entre elles sont permutables.

(¹) Il résulte de l'article VII, page 395, que les fonctions Z sont les seules solutions de l'équation (G) qui soient holomorphes au point x; il suffi de faire, *dans cet article*, $\psi(z) = \varphi(z)$.

Il y a lieu de remarquer que $Z(z, 1) = z$ et que la substitution $S(1)$ est identique. On en conclut

$$S(k)\, S\left(\frac{1}{k}\right) = S(1) = 1;$$

Les fonctions $Z(z, k)\, Z\left(z, \frac{1}{k}\right)$ sont donc inverses l'une de l'autre, résultat évident d'après l'équation (λ).

V. — Les courbes d'égal module de $B(z)$.

6. Les propriétés que je vais rappeler concernent les courbes d'*égal module* d'une fonction telle que $B(z)$, holomorphe dans une région continue du plan qui entoure l'un de ses zéros. Pour une valeur très petite du module μ, la courbe d'*égal module*

$$\operatorname{mod} B(z) = \mu = \text{const.}$$

comprend un ovale O_μ entourant le zéro x de la fonction, dans l'hypothèse où x est un zéro simple.

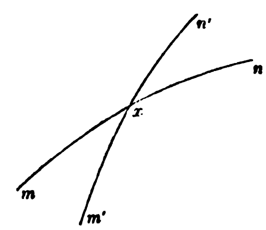
Déterminons, chose toujours possible, un nombre M jouissant de la propriété suivante :

Tant que $\mu < M$, l'ovale O_μ ne cesse jamais d'exister, c'est-à-dire d'être une courbe fermée sans point multiple, ne contenant à son intérieur : 1° aucun point où $B(z)$ cesse d'être holomorphe; 2° aucun zéro de $B'(z)$; 3° aucun zéro de $B(z)$, si ce n'est le point x.

Alors, pourvu que $\mu < M$, la courbe d'égal module, $\operatorname{mod} B(z) = \mu$, n'aura à l'intérieur de l'ovale O_M d'autre portion que l'ovale O_μ. Pour tous les points extérieurs à O_μ et intérieurs à O_M, on aura $\operatorname{mod} B(z) > \mu$; pour tous les points intérieurs à O_μ, on aura au contraire $\operatorname{mod} B(z) < \mu$.

Je dois aussi rappeler que les courbes d'égal argument, trajectoires orthogonales des courbes d'égal module, traversent toutes le point x. Soit mn une branche de l'une de ces courbes. Le point x la divise en deux demi-branches; tandis que sur la demi-branche xm, l'argument de $B(z)$ reste constamment égal à α, sur la demi-branche opposée xn il est égal à $\alpha + \pi$. Plus généralement, deux demi-branches xm, xm', répondant aux valeurs constantes α et β de l'argument de $B(z)$, se

coupent en x sous l'angle $(\alpha - \beta)$. Deux arguments, qui ne diffèrent que par un multiple entier de 2π, donnent lieu à la même demi-branche issue de x. En résumé, à toute valeur de l'argument, arbitrairement proposée, correspond une demi-branche issue de x parfaitement déter-



minée. Dans l'intérieur de l'ovale O_M il n'y a pas d'autres points donnant lieu à un argument α pour $B(z)$ que ceux de la demi-branche correspondant à α.

7. Ces résultats rappelés, je vais démontrer la série de propositions suivante :

I. *Pour une valeur de z intérieure à O_M et pour des valeurs de* $\text{mod}\,k < 1$, *l'équation*

$$(\lambda) \qquad B(Z) = kB(z)$$

admet au moins une racine intérieure à O_M.

Soit en effet $k = \rho e^{i\theta}$, $\text{mod}\,B(z) = \mu$, $\arg.B(z) = \alpha$; on aura, pour tous les points Z vérifiant l'équation (λ)

$$\text{mod}\,B(Z) = \rho\mu,$$
$$\arg.B(Z) = \alpha + \theta.$$

L'ovale $O_{\rho\mu}$ est intérieur à O_M; en effet, comme $\rho < 1$, il est intérieur à O_μ qui est intérieur lui-même à O_M. La demi-branche de la courbe d'égal argument $(\theta + \alpha)$ coupe certainement l'ovale $O_{\rho\mu}$ en un point Z qui vérifie l'équation (λ), et ce point est intérieur à O_M.

II. *La fonction Z de z, dont la valeur est représentée par le point Z trouvé ci-dessus, est holomorphe dans le contour* O_M.

En effet, pour qu'elle eût un point critique, il faudrait qu'il existât à

la fois un point z et un point Z, intérieurs au contour O_M et vérifiant les équations simultanées

$$B(Z) = kB(z), \quad B'(Z) = 0;$$

or cela n'est pas possible, car le contour O_M ne contient aucun zéro de $B'(z)$.

III. *La fonction* Z *est unique, et c'est la fonction* $Z(z, k)$ *déjà définie.*

On peut douter que l'équation (λ) n'ait pas plus d'une racine dans le contour O_M. Si cela était, chacune d'elles serait holomorphe dans le contour O_M, d'après la proposition précédente.

D'autre part, en faisant $z = x$, il vient $B(Z) = 0$; et, comme $B(z)$ n'a pas d'autre zéro que x dans le contour O_M, toutes ces fonctions holomorphes prendraient la même valeur x en x. Mais, comme l'équation (λ) ne peut définir qu'une seule fonction holomorphe prenant en x la valeur x, attendu que x est zéro simple de $B(z)$, on en conclut qu'il n'y a en réalité qu'une seule fonction Z; elle ne peut être autre que la fonction $Z(z, k)$ déjà définie.

De là ce théorème:

Toutes les fonctions $Z(z, k)$, *dans lesquelles* $\bmod k < 1$, *sont holomorphes dans l'ovale* O_M.

Mais considérons alors une substitution $S(k)$ dans laquelle $\rho = \bmod k < 1$, toutes ces substitutions forment évidemment un groupe; de plus la substitution $S(k)$, par exemple, transforme l'ovale O_μ dans un ovale $O_{\rho\mu}$ intérieur à O_μ.

On en déduit que toutes les substitutions $S(k)$, arbitrairement réitérées ou multipliées entre elles, amènent un point quelconque intérieur à O_M, aussi près du point x que l'on voudra, sur des ovales qui vont en se resserrant de plus en plus autour de ce point. Ce point est donc un point limite commun à toutes les substitutions du groupe.

8. Il est encore facile de montrer que : *Toute fonction* $Z(z, k)$ *est holomorphe dans l'ovale* $O_{\frac{M}{\bmod k}}$ *si* $\bmod k > 1$.

Lorsque $\bmod k = 1$, la substitution $S(k)$ transforme un point z, pris sur l'ovale O_μ et sur la courbe d'égal argument α, en un point Z situé

sur l'ovale O_μ et sur la courbe d'égal argument $(\alpha+\theta)$, où $\theta = \arg k$. Si θ est commensurable avec π, on reviendra au point de départ après un nombre fini d'opérations, résultat évident puisque k est alors une racine de l'unité. Si θ est incommensurable avec π, sur un arc quelconque de l'ovale O_μ aussi petit que l'on voudra, il y aura toujours une infinité de points transformés de z.

Le point x n'est donc pas un point limite pour les substitutions $S(k)$ *dans lesquelles* $\mathrm{mod}\, k = 1$: il pouvait y avoir doute dans ce cas.

9. Les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction $B(z)$ semblent, on le voit, indiquer un premier pas vers la solution du problème de la division du plan en régions pour une substitution donnée. Sans oser insister prématurément sur ce point important, je crois que ce qui précède ajoute à la fonction $B(z)$ un réel intérêt.

VI. — Symbole itératif.

10. L'équation itérative

$$\Xi_p(z) = \varphi(z) \tag{I}$$

se résout immédiatement, grâce aux fonctions Z.

Supposons que $\varphi(z)$ puisse faire partie d'un groupe de fonctions Z et que

$$\varphi(z) = Z(z, k_0),$$

k_0 *étant quelconque* sauf zéro et l'infini. Il est clair que de la relation

$$Z_p(z, \sqrt[p]{k_0}) = Z(z, k_0) = \varphi(z)$$

on déduit immédiatement que l'équation (I) admet p solutions holomorphes dans le domaine de ce point x, qui est un point limite pour celles des fonctions $Z(z, k)$ dans lesquelles $\mathrm{mod}\, k < 1$.

Tout se réduit donc à chercher si $\varphi(z)$ peut toujours faire partie d'un groupe de fonctions Z; or, à cet égard, je vais démontrer le théorème suivant :

Une fonction donnée $\varphi(z)$ *peut faire partie d'un groupe de fonc-*

tions Z chaque fois que la fonction $\varphi(z) - z$ aura un zéro qui ne rendra $\operatorname{mod}\varphi'(z)$ *égal ni à 1 ni à zéro.*

Soient en effet x un tel zéro et $\operatorname{mod}\varphi'(x) < 1$. Le point x est un point limite de $\varphi(z)$; on a donc, en formant $B(z)$ et ensuite les fonctions $Z(z, k)$,

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)].$$

Si, au contraire, $\operatorname{mod}\varphi'(x) > 1$, prenons l'équation

$$\varphi(\psi) = z,$$

qui définit, pour ψ, une fonction holomorphe en x et prenant en x la valeur x; comme on a sans cesse

$$\varphi'(\psi)\psi'(z) = 1,$$

en faisant à la fois $z = x$, $\psi = x$, on trouve

$$\varphi'(x)\psi'(x) = 1,$$

d'où

$$\operatorname{mod}\psi'(x) = \frac{1}{\operatorname{mod}\varphi'(x)} < 1.$$

Ainsi x est un point limite de $\psi(z)$. Formons alors la fonction $B(z)$ relative à ce point limite x de $\psi(z)$, puis l'équation

$$B(Z) = kB(z),$$

d'où l'on tire les fonctions $Z(z, k)$. Nous aurons, en particulier,

$$\psi(z) = Z[z, \psi'(x)] = Z\left[z, \frac{1}{\varphi'(x)}\right]$$

et, comme $\psi(z)$ et $\varphi(z)$ sont inverses l'une de l'autre,

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)],$$

comme précédemment.

De là ce théorème :

Si la fonction $\varphi(z) - z$ admet un zéro pour lequel $\operatorname{mod}\varphi'(x)$ *ne soit ni nul ni égal à l'unité, l'équation itérative*

$$\Xi_p(z) = \varphi(z) \tag{I}$$

admet p solutions holomorphes dans le domaine du point x, et l'on peut écrire, en représentant par le symbole $\varphi_{\frac{1}{p}}(z)$ l'une quelconque *de ces p solutions,*

$$\varphi_{\frac{1}{p}}(z) = Z\left[z, \sqrt[p]{\varphi'(x)}\right].$$

11. Mais nous sommes en mesure de donner une plus grande extension au symbole $\varphi_\omega(z)$ en l'étendant au cas de valeurs incommensurables ou même imaginaires de ω. Il suffit de poser

$$\varphi_\omega = Z\{z, [\varphi'(x)]^\omega\}.$$

Ce symbole représente généralement une infinité de fonctions, toutes holomorphes par rapport à z dans le domaine de x. Ainsi se trouve résolu le problème que M. Korkine s'était proposé au Tome XVII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, et dans lequel ce géomètre avait adopté la méthode des coefficients indéterminés. A la vérité, je suppose connue la fonction $B(z)$, et c'est à ce point que se ramène toute la difficulté de la construction de φ_ω.

Mais nous connaissons des propriétés de la fonction $B(z)$, et c'est déjà quelque chose de savoir qu'il existe une infinité de solutions holomorphes du problème, sous la seule condition qu'il existe un zéro de $\varphi(z) - z$ ne rendant $\operatorname{mod}\varphi'(z)$ égal ni à zéro ni à l'unité.

Ainsi $\operatorname{mod} a$ n'étant ni 1 ni 0, on peut affirmer *a priori* que, dans le domaine de l'origine, les équations

$$\Xi_p(z) = a\sin z, \qquad \Xi_p(z) = a\operatorname{tang}(z),$$
$$\Xi_p(z) = a\log(1+z) \qquad \Xi_p(z) = a\frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \ldots$$

admettent chacune p intégrales holomorphes.

VII. — Équation $\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$.

12. Cette équation est l'extension naturelle de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$

que vérifient les fonctions Z.

Cherchons d'une façon générale si l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$$

peut admettre une solution holomorphe dans le domaine d'un point limite de $\varphi(z)$. Soit x ce point limite, et posons $y = \Xi(x)$; je ne suppose pas que $\psi(z)$ admette une singularité en y.

L'équation (D) nous donne d'abord, en faisant $z = x$,

$$y = \psi(y);$$

en la différentiant et faisant $z = x$, on trouve

$$\Xi'(x)\,\varphi'(x) = \psi'(y)\,\Xi'(x);$$

si $\Xi'(x)$ n'est pas nul, on a donc

$$\varphi'(x) = \psi'(y);$$

mais cette conclusion se maintient dans tous les cas, car, si $\Xi'(x) = 0$, $\Xi''(x) = 0$, ..., $\Xi^{(n-1)}(x) = 0$ et que $\Xi^{(n)}(x)$ ne soit pas nul, en différentiant (D) n fois et faisant $z = x$, il vient

$$\Xi^{(n)}(x)\,\varphi'(x) = \psi'(y)\,\Xi^{(n)}(x),$$

et, comme $\Xi^{(n)}(x)$ n'est pas nul, on a encore

$$\varphi'(x) = \psi'(y).$$

Comme $\operatorname{mod}\varphi'(x) < 1$, puisque x est un point limite de $\varphi(z)$, on a donc

$$\operatorname{mod}\psi'(y) < 1.$$

Donc *y est un point limite de $\psi(z)$.*

Mais x et y ne sont pas deux points limites quelconques de φ et ψ; *il faut que la relation*

$$\varphi'(x) = \psi'(y)$$

soit vérifiée.

Cela ne sera pas toujours possible; mais nous admettrons que, dans le cas présent, cette relation ait lieu. Appelons a la valeur commune de $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$ et poursuivons les conséquences de l'hypothèse d'une intégrale holomorphe $\Xi(z)$ de l'équation (D).

La fonction $\varphi(z)$ et la fonction $\psi(z)$ donnent naissance à deux fonc-

tions limites $B(z)$ et $C(z)$, holomorphes respectivement dans les domaines de x et de y.

Les fonctions $C[\Xi(z)]$ et $C\{\Xi[\varphi(z)]\}$ sont holomorphes dans le domaine du point x, et, par l'équation (D), on a

$$C\{\Xi[\varphi(z)]\} = C\{\psi[\Xi(z)]\}.$$

Or, dans l'équation

$$C[\psi(z)] = a\,C(z),$$

qui n'est autre que l'équation appelée α dans l'Introduction, remplaçons z par $\Xi(z)$, on aura

$$C\{\psi[\Xi(z)]\} = a\,C[\Xi(z)],$$

donc

$$C\{\Xi[\varphi(z)]\} = a\,C[\Xi(z)].$$

La fonction, holomorphe en x, $C[\Xi(z)]$ se reproduit donc multipliée par $a = \varphi'(x)$, lorsqu'on y remplace z par $\varphi(z)$; d'après la *proposition fondamentale* rapportée dans l'Introduction, cette fonction ne doit différer que par un facteur constant d'une puissance entière positive de $B(z)$, par exemple $[B(z)]^n$, et le multiplicateur est alors $[\varphi'(x)^n]$; mais le multiplicateur nous est donné, c'est $\varphi'(x)$ lui-même. Donc, comme $\operatorname{mod}\varphi'(x) < 1$, il faut nécessairement que $n = 1$; donc enfin la fonction $C[\Xi(z)]$ est nécessairement proportionnelle à $B(z)$, d'où

$$C[\Xi(z)] = k\,B(z).$$

13. Ainsi, tandis que précédemment j'étais conduit à l'équation

$$(\lambda) \qquad B(Z) = k\,B(z),$$

je me trouve ici amené à considérer des fonctions V vérifiant l'équation

$$(\mu) \qquad C(V) = k\,B(z),$$

où k est une constante. L'analogie entre ces deux équations est évidente.

Je remarque encore que cette équation définit une fonction $V(z, k)$ holomorphe en x, qui, pour $z = x$, prend la valeur y et dans laquelle

$$k = \left(\frac{dV}{dz}\right)_x.$$

Je vais démontrer que *toutes les fonctions* V *sont des solutions de l'équation* (D). En effet, de l'équation de définition

$$C[V(z, k)] = k\,B(z),$$

on tire, en y remplaçant z par $\varphi(z)$,

$$C\{V[\varphi(z), k]\} = k\,B[\varphi(z)] = ak\,B(z),$$

d'où immédiatement, en ayant égard à nos notations et se reportant à l'équation (μ), où l'on changerait k en ak,

$$V[\varphi(z), k] = V(z, ak).$$

Dans l'équation

$$C[\psi(z)] = a\,C(z)$$

remplaçons z par $V(z, k)$; il vient

$$C\{\psi[V(z, k)]\} = a\,C[V(z, k)] = ak\,B(z),$$

d'où encore

$$\psi[V(z, k)] = V(z, ak),$$

donc enfin

$$V[\varphi(z), k] = \psi[V(z, k)].$$

Ainsi :

Les fonctions $V(z, k)$ *sont toutes des solutions de l'équation* (D) *qui possède ainsi une infinité de solutions holomorphes chaque fois que deux points limites* x *et* y, *l'un de* $\varphi(z)$, *l'autre de* $\psi(z)$, *vérifient la relation*

$$\varphi'(x) = \psi'(y);$$

nous avons vu, du reste, que de telles solutions de l'équation (D) doivent nécessairement faire partie des fonctions V.

Ce n'est pas d'ailleurs le seul cas où l'on peut être assuré que l'équation (D) admet des intégrales holomorphes; il résulte en effet de ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire que x et y soient des points limites de φ et de ψ. Pour s'en convaincre, il suffit de généraliser un peu les résultats que l'on vient d'obtenir.

VIII. — Les fonctions Z, V, W et Θ.

14. Considérons les équations

$$(\lambda)\qquad B(Z) = kB(z),$$
$$(\mu)\qquad C(V) = kB(z),$$
$$(\lambda')\qquad C(\Theta) = kC(z),$$
$$(\mu')\qquad B(W) = kC(z).$$

Les fonctions Z et V ont été déjà définies. Les fonctions Θ sont les fonctions Z de la fonction ψ; enfin les fonctions W sont analogues aux fonctions V. La fonction φ est l'une des fonctions Z, la fonction ψ l'une des fonctions Θ. De plus chacune n'occupe dans son groupe aucun rang spécial, elles font seulement partie de celles des fonctions Z et Θ qui correspondent à un paramètre k de module inférieur à l'unité. Mais les fonctions Z et Θ ont avec les fonctions V et W des *relations indépendantes de toute hypothèse sur k*; ces relations généralisent la dernière équation du paragraphe précédent, et fournissent l'extension dont nous venons de parler.

Désignons généralement par $[\zeta]$ la substitution qui consiste à remplacer z par ζ; si l'on étudie l'effet d'une substitution $[Z]$, $[V]$, $[W]$, $[\Theta]$ dans les quatre fonctions Z, V, W, Θ, on est amené à construire le Tableau suivant :

	Z	V	W	Θ
[Z]	Z	V		
[V]			Z	V
[W]	W	Θ		
[Θ]			W	Θ

La ligne verticale de gauche indique les substitutions, la ligne horizontale du haut, les fonctions où l'on substitue, et le carré intérieur

fournit le résultat, en se rappelant que, dans le résultat, le paramètre est égal au produit des paramètres de la fonction que l'on substitue et de la fonction où s'effectue la substitution. Les vides marquent des substitutions impossibles, comme le serait celle de Z dans Θ, alors que Θ n'est défini que dans le domaine de y et que Z ne prend que des valeurs appartenant au domaine de x.

15. Ainsi, par exemple, on aura (1^re horizontale, 2^e verticale)

$$V[Z(z,h),k] = V(z,hk);$$

on aura encore (2^e horizontale, 4^e verticale)

$$\Theta[V(z,k'),h'] = V(z,h'k')$$

si l'on suppose $hk = h'k'$; on a donc

$$V[Z(z,a),k] = \Theta[V(z,k'),h'],$$

si l'on fait $k' = k$, il faut avoir $h' = h$, et alors

$$V[Z(z,h),k] = \Theta[V(z,k),h],$$

formule qui généralise la dernière du paragraphe précédent. On peut en même temps énoncer ce théorème :

Si les fonctions $\varphi(z) - z$, et $\psi(z) - z$ ont chacune un zéro, x et y, tel que $\varphi'(x) = \psi'(y)$, et que la valeur commune à $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$ n'ait un module égal ni à zéro ni à l'unité, l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$$

aura toujours une infinité de solutions holomorphes dans le domaine du point x.

Dans de telles conditions, en effet, φ et ψ font toujours partie chacune d'un groupe de fonctions, tel que celui des fonctions Z ou Θ. Leurs dérivées en x et y étant respectivement égales, désignons par a leur valeur commune, nous aurons

$$\varphi(z) = Z(z,a), \qquad \psi(z) = \Theta(z,a);$$

et les fonctions V qui accompagnent les groupes simultanés Z et Θ donneront chacune lieu à la relation

$$V[Z(z,a),k] = \Theta[V(z,k),a].$$

16. On peut supposer que x et y coïncident. Alors, si φ et ψ donnent lieu à la même fonction limite, comme $\varphi'(x) = \psi'(x)$, φ et ψ coïncident, on est dans le cas traité au début. Mais, si φ et ψ ne donnent pas lieu à la même fonction limite, elles restent distinctes, et les quatre groupes de fonctions Z, V, W, Θ restent aussi distincts. Ce cas présente ceci d'intéressant, que des substitutions, qui étaient tout à l'heure impossibles, acquièrent un sens; mais le problème rentre alors dans l'étude des fonctions qui auraient un point limite commun, au sens le plus général, et je ne veux pas entreprendre ici cette étude, bien qu'elle ne soit peut-être pas sans intérêt.

Tel serait le cas, par exemple, des fonctions

$$\varphi(z) = a \sin z, \qquad \psi(z) = b \log(1 + z),$$

dans lesquelles l'origine est un point limite commun, soit pour elles, soit pour leurs fonctions inverses, suivant la grandeur des modules de a et de b.

IX. — Exemples.

17. Je choisirai le cas de

$$\varphi(z) = \sqrt{a z^2 + c},$$

auquel se ramène le cas général de $\sqrt{a z^2 + 2 b z + c}$. En posant

$$x^2 = \frac{c}{1 - a},$$

on peut écrire

$$\varphi(z) = \sqrt{x^2 + a(z^2 - x^2)}, \qquad \text{d'où} \qquad [\varphi(z)]^2 - x^2 = a(z^2 - x^2).$$

Les points $\pm x$ sont deux points limites si, comme je le suppose, $\bmod a < 1$.

La fonction $B(z)$ n'est autre que $z^2 - x^2$.

Les courbes d'égal module sont des cassinoïdes qui ont x et $-x$ pour foyers. Les courbes d'égal argument sont formées d'un faisceau d'hyperboles équilatères passant par x et $-x$.

Parmi les cassinoïdes se trouve une lemniscate qui a son point double réel à l'origine. Les deux boucles O_M et O'_M de cette lemniscate entourent l'une le point x, l'autre le point $-x$; chacune d'elles constitue l'ovale limite dont il a été parlé.

Tout du long de cette lemniscate on a

$$\operatorname{mod}(z^2 - x^2) = \operatorname{mod} x^2;$$

les cassinoïdes répondant à des valeurs de $\mu = \operatorname{mod}(z^2 - x^2)$ inférieures à $\operatorname{mod} x^2$ se composent de deux ovales O_μ et O'_μ entourant respectivement les points x et $-x$, et intérieurs aux boucles O_M, O'_M.

Pour les valeurs de k dont le module est inférieur à 1, l'équation

$$(\lambda) \qquad (Z^2 - x^2) = k(z^2 - x^2)$$

admet deux racines $Z(z, k)$, $Z'(z, k)$ situées respectivement à l'intérieur des ovales limites O_M et O'_M. Chacune de ces racines est fonction holomorphe de z dans ces ovales. La substitution $S(k)$, où $\operatorname{mod} k < 1$, transforme la cassinoïde O_μ en une cassinoïde intérieure, et x est un point limite pour $Z(z, k)$, $-x$ un point limite pour $Z'(z, k)$.

Si l'on pose l'équation fonctionnelle

$$\Xi_p(z) = \sqrt{az^2 + c},$$

les p solutions holomorphes de cette équation sont données par la formule

$$\Xi(z) = \sqrt{a^{\frac{1}{p}} z^2 + \frac{c}{1-a}\left(1 - a^{\frac{1}{p}}\right)}.$$

Le symbole général d'itération est le suivant :

$$\varphi_\omega(z) = \sqrt{a^\omega z^2 + \frac{c}{1-a}(1 - a^\omega)}.$$

Pour chaque détermination de a^ω, la fonction $\varphi_\omega(z)$ est holomorphe dans la boucle O_M de la lemniscate.

18. Prenons plus généralement

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{az^m + c};$$

on mettra $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{x^m + a(z^m - x^m)},$$

en posant

$$x^m = \frac{c}{1-a}.$$

Soient ε une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, et x une valeur quelconque de $\sqrt[m]{\frac{c}{1-a}}$; les points $x, x\varepsilon, x\varepsilon^2, \ldots, x\varepsilon^{m-1}$ sont tous des points ra-

cines de $\varphi(z) - z$; en supposant $\operatorname{mod} a < 1$, chacun de ces points est limite pour une branche de la fonction φ.

On a $B(z) = z^m - x^m$; et la courbe d'égal module de $B(z)$ qui passe par l'origine est représentée par l'équation

$$\operatorname{mod}(z^m - x^m) = \operatorname{mod} x^m;$$

c'est une rosace formée de m boucles entourant chacune l'un des m points $x\varepsilon^n$: soit R_n celle qui entoure le point $x\varepsilon^n$. Lorsque z est intérieur à l'une des boucles et que $\operatorname{mod} k < 1$, l'équation en Z

$$(\lambda) \qquad Z^m - x^m = k(z^m - x^m)$$

admet une racine dans chacune des boucles : soit ${}_nZ$ celle qui est intérieure à R_n; la fonction ${}_nZ$ est holomorphe à l'intérieur de la boucle R_n. Chacune de ces boucles joue, par rapport au point $x\varepsilon^n$ qu'elle entoure, le rôle d'ovale limite.

19. Donnons-nous maintenant

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{a z^m + c}, \qquad \psi(z) = \sqrt[m']{a z^{m'} + c'};$$

en appelant x et y deux racines quelconques des équations respectives

$$x^m = \frac{c}{1-a}, \qquad y^{m'} = \frac{c'}{1-a},$$

et supposant, pour fixer les idées, $\operatorname{mod} a < 1$, envisageons les boucles R et R' qui entourent les points x et y respectivement.

Dans l'intérieur de R, l'équation

$$(\lambda) \qquad Z^m - x^m = k(z^m - x^m)$$

définit une fonction holomorphe de z si $\operatorname{mod} k < 1$; si $\operatorname{mod} k > 1$, l'holomorphisme a encore lieu, mais dans un ovale O_μ intérieur à R.

La même chose a lieu pour l'équation

$$Z^{m'} - y^{m'} = k(z^{m'} - y^{m'})$$

dans la boucle R'. On voit que, puisque $\operatorname{mod} a < 1$, φ et ψ sont deux fonctions holomorphes qui ont x et y pour points limites, de plus, la condition $\varphi'(x) = \psi'(y)$ est remplie. On est donc sûr de trouver des fonctions holomorphes vérifiant l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Ces fonctions seront données par l'équation

$$V^{m'} - y^{m'} = k(z^m - x^m)$$

ou

$$(\mu) \qquad V^{m'} - \frac{c'}{1-a} = k\left(z^m - \frac{c}{1-a}\right).$$

Lorsque $\operatorname{mod}\xi < \operatorname{mod} y^{m'}$, l'équation

$$V^{m'} - y^{m'} = \xi$$

n'a qu'une seule racine dans l'intérieur de la boucle R′.

Donc, lorsque l'on aura

$$\operatorname{mod} k(z^m - x^m) \leq \operatorname{mod} y^{m'},$$

c'est-à-dire dans l'intérieur d'un ovale intérieur à R et convenablement petit, l'équation (μ) définira une fonction holomorphe $V(z, k)$. Cette fonction vérifie l'équation (D), on le constate sans peine.

20. Je terminerai par le cas d'une substitution linéaire [1]. Ce cas est simple, mais il fournit un rapprochement intéressant. On sait quel parti M. Poincaré a tiré, dans ses recherches des cercles qui passent par les points doubles de la substitution, et du faisceau des cercles orthogonaux. Or, si x et x' sont les points doubles de la substitution, on sait que celle-ci peut être mise sous la forme

$$\frac{Z-x}{Z-x'} = k\frac{z-x}{z-x'}.$$

Donc $B(z) = (x - x')\dfrac{z-x}{z-x'}$. Les courbes d'égal module de $B(z)$ ne sont autres que les cercles, lieu des points dont les distances à x et à x' sont dans un rapport donné: les courbes d'égal argument sont au contraire les cercles qui passent par x et x'. Le rôle important que jouent ces cercles dans la représentation des substitutions linéaires induit donc à penser que les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction $B(z)$ pourraient être introduites avec utilité dans l'étude de substitutions quelconques; j'ai essayé d'en fournir ici une première justification.

(1) Les équations d'où dépend la division des fonctions circulaires ou elliptiques présentent encore un exemple étendu dans lequel la fonction $B(z)$ est connue, et où l'on peut, par conséquent, former explicitement les équations (λ), (μ), (λ'), (μ').

APPLICATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE

AUX

PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES

ET

PYRO-ÉLECTRIQUES,

PAR P. DUHEM.

PREMIÈRE PARTIE.

PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES.

I. — Propositions fondamentales relatives au circuit ouvert.

Nous avons appliqué, dans un récent Ouvrage (1), les équations de la Thermodynamique à l'éclaircissement de quelques-unes des difficultés que présente l'étude de l'électricité statique ou du galvanisme. Dans cette étude, nous nous sommes limités au cas où tous les points des conducteurs étudiés sont à la même température. Nous allons chercher, en nous affranchissant de cette restriction, à compléter la théorie des phénomènes thermo-électriques et pyro-électriques.

Cette théorie reposera sur quelques propositions très simples que nous allons démontrer.

Envisageons tout d'abord un conducteur ouvert dont les deux extrémités, formées du même métal ou de métaux différents, soient à la même température, tandis que les parties intermédiaires sont formées par des métaux quelconques et sont à des températures quelconques.

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications.* Paris, Hermann; 1886.

Supposons qu'une quantité d'électricité dq décrive un élément de chemin à l'intérieur de ce conducteur. Elle engendre une quantité de chaleur dQ. *Si la température des diverses parties du système est supposée stationnaire*, cette quantité de chaleur est cédée à l'extérieur. L'entropie du système varie en même temps de dS. Si nous désignons par T la température absolue le long de l'élément de chemin parcouru par la charge électrique, et par dN la transformation non compensée élémentaire accomplie par ce transport, nous aurons

$$\frac{dQ}{T} + dS = dN. \tag{1}$$

La condition d'équilibre s'obtient en exprimant que la modification considérée est réversible ou que $dN = 0$, ce qui donne

$$dQ = -dT\,dS. \tag{2}$$

Soient

dU la variation de l'énergie interne du système;
P la pression externe, supposée normale, uniforme et constante, qui agit sur ce système;
dv la quantité dont son volume augmente;
A l'équivalent calorifique du travail.

On aura

$$dQ = -d(U + APv).$$

Si nous désignons par $d\mathfrak{T}$ le travail non compensé, c'est-à-dire l'expression

$$ET\,dN,$$

dans laquelle E désigne l'équivalent mécanique de la chaleur, nous aurons, au lieu de l'égalité (1), l'égalité

$$d\mathfrak{T} = -d(EU + Pv) + ET\,dS, \tag{1'}$$

et, au lieu de l'égalité (2), l'égalité

$$d(EU + Pv) = ET\,dS. \tag{2'}$$

Supposons qu'on transporte la charge dq d'un point M pris à une extrémité du conducteur en un point M' pris à l'autre extrémité du même

conducteur. Le travail non compensé total qui sera effectué aura pour valeur

$$(1'') \qquad d\mathfrak{C} = -d(\mathrm{EU} + \mathrm{P}v) + \mathrm{E}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \mathrm{T}\, d\mathrm{S},$$

et, s'il y a équilibre, nous aurons

$$(2'') \qquad d(\mathrm{EU} + \mathrm{P}v) = \mathrm{E}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \mathrm{T}\, d\mathrm{S}.$$

Dans ces deux dernières formules, le symbole $d(\mathrm{EU} + \mathrm{P}v)$ représente l'accroissement total que subit la quantité $(\mathrm{EU} + \mathrm{P}v)$ lorsque la charge dq passe du point M au point M′, tandis que $d\mathrm{S}$ représente l'augmentation que subit l'entropie du système lorsque la charge dq décrit un élément de trajectoire au sein d'une portion de métal dont la température est T.

Supposons maintenant que *le conducteur considéré laisse passer l'électricité sans éprouver aucune modification permanente*. Nous pourrons calculer le terme $d(\mathrm{EU} + \mathrm{P}v)$ qui figure dans les formules (1″) et (2″).

En premier lieu, la température de chaque élément de volume étant supposée constante et cet élément de volume ne subissant aucun changement d'état, sa grandeur ne varie pas. On a donc $dv = 0$, et le terme à calculer se réduit à $\mathrm{E}\,d\mathrm{U}$.

Mais, d'autre part, la variation subie par l'énergie ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système; cette variation gardera la même valeur si, d'une autre manière, on fait passer la charge dq du point M au point M′.

Supposons, par exemple, que nous fassions passer la charge dq du point M au point M′ par un fil dont tous les points sont à la même température et qui laisse passer l'électricité sans éprouver de changement d'état. La quantité $\mathrm{E}\,d\mathrm{U}$ aura la même valeur que dans le cas précédent; mais, maintenant, nous pourrons calculer cette valeur.

En effet, le fil laissant passer l'électricité sans changement d'état, son volume ne varie pas, le travail externe est nul; $\mathrm{E}\,d\mathrm{U}$ représente donc le travail total effectué dans la modification dont il s'agit. Le travail total est la somme du travail compensé et du travail non compensé. Or nous avons indiqué ailleurs [1] les raisonnements qui permettent

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, IIIe Partie, Chap. I et III.

de déduire des seules lois de Coulomb l'expression du travail compensé et du travail non compensé produits par le déplacement d'une charge électrique dq au sein d'un conducteur dont tous les points sont à la même température et qui laisse passer l'électricité sans éprouver de changement d'état. Voici les résultats qu'on peut déduire de ces raisonnements :

Soient

V le niveau potentiel en M;
V' le niveau potentiel en M';
ε une constante qui dépend de l'unité choisie pour évaluer les charges électriques;
Θ une quantité qui dépend de la nature de la substance à l'intérieur de laquelle se trouve le point M;
Θ' une quantité analogue relative au point M'.

Le travail non compensé produit par le transport de la charge dq du point M au point M' au travers du fil en question aura pour valeur

$$[(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta')]\, dq.$$

Soient H et H' deux quantités analogues à Θ et Θ'. Le travail compensé aura pour valeur

$$(H - H')\, dq.$$

On aura donc

$$E\, dU = [(\varepsilon V' + \Theta' + H') - (\varepsilon V + \Theta + H)]\, dq.$$

D'après ce qui précède, l'équation (1''), qui donne le travail non compensé produit par le déplacement d'une charge dq du point M au point M' peut s'écrire

$$d\mathfrak{C} = [(\varepsilon V + \Theta + H) - (\varepsilon V' + \Theta' + H')]\, dq + E \int_M^{M'} T\, dS, \tag{3}$$

et la condition d'équilibre devient

$$(\varepsilon V + \Theta + H) - (\varepsilon V' + \Theta' + H') + \frac{1}{dq} E \int_M^{M'} T\, dS = 0. \tag{4}$$

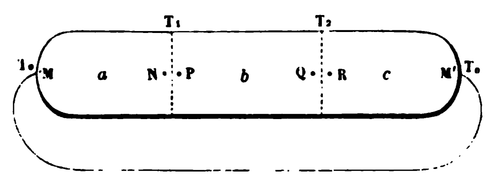
Ces égalités sont des conséquences des principes fondamentaux de la Théorie mécanique de la chaleur, joints aux lois données par Coulomb pour les actions mutuelles des corps électrisés. Pour en déduire

quelques conséquences, cherchons à donner une forme plus explicite au terme

$$E\int_{M}^{M'} T\,dS.$$

Nous ne supposerons pas le conducteur homogène; mais, tout d'abord, nous le supposerons formé d'un nombre fini de substances différentes; pour fixer les idées, nous admettrons que le nombre de ces substances se réduise à trois, que nous désignerons par les lettres *a*, *b*, *c* (*fig.* 1).

Fig. 1.



Nous désignerons par T_0 la température commune des parties extrêmes du conducteur; le point M sera supposé à l'intérieur du métal *a*, le point M' à l'intérieur du métal *c*. La valeur de la quantité H dépend de la nature du métal *a* et de la température T_0; nous mettrons cette relation en évidence en remplaçant la lettre H par le symbole $H_a(T_0)$. De même nous remplacerons la quantité H' par le symbole $H_c(T_0)$.

Nous désignerons par T_1 la température de la soudure qui sépare le métal *a* du métal *b*, et par T_2 la température de la soudure qui sépare le métal *b* du métal *c*. Soient N et P deux points infiniment voisins de la première soudure, l'un à l'intérieur du métal *a*, l'autre à l'intérieur du métal *b*. D'après un raisonnement exposé ailleurs [1], la charge dq passant du point N au point P fournit à l'intégrale qu'il s'agit de calculer un terme qui a pour valeur

$$ET_1\,dS + [H_b(T_1) - H_a(T_1)]\,dq.$$

Soient de même Q et R deux points infiniment voisins de la seconde soudure, l'un à l'intérieur du métal *b*, l'autre à l'intérieur du métal *c*.

[1] *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, IIIe Partie, Ch. I, § I.

La charge dq, passant du point Q au point R, fournit à l'intégrale qu'il s'agit de calculer un terme qui a pour valeur

$$\mathrm{ET}_2\, d\mathrm{S} = [\mathrm{H}_c(\mathrm{T}_2) - \mathrm{H}_b(\mathrm{T}_2)]\, dq.$$

On a donc

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{dq}\mathrm{E}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \mathrm{T}\, d\mathrm{S} = {} & \frac{1}{dq}\mathrm{E}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \mathrm{T}\, d\mathrm{S} + \frac{1}{dq}\mathrm{E}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{T}\, d\mathrm{S} + \frac{1}{dq}\mathrm{E}\int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{M}'} \mathrm{T}\, d\mathrm{S} \\ & - \mathrm{H}_a(\mathrm{T}_1) + \mathrm{H}_b(\mathrm{T}_1) - \mathrm{H}_b(\mathrm{T}_2) + \mathrm{H}_c(\mathrm{T}_2). \end{aligned} \right.$$

La partie de la trajectoire décrite par la charge dq qui est relative à chacune des intégrales qui figure au second membre est décrite tout entière à l'intérieur d'un seul métal dont les divers points sont à des températures différentes. Il nous reste donc à évaluer l'intégrale

$$\mathrm{E}\int \mathrm{T}\, d\mathrm{S}$$

relative au déplacement d'une charge dq à l'intérieur d'un corps homogène dont la température varie d'un point à un autre.

La variation $d\mathrm{S}$ est évidemment de l'ordre de grandeur du produit de la charge transportée dq par le chemin ds que cette charge parcourt; elle s'annule, comme nous l'avons vu ailleurs [1], si la température est constante le long de l'élément ds. On peut donc écrire

$$d\mathrm{S} = \lambda \frac{d\mathrm{T}}{ds}\, ds\, dq.$$

Supposons que la charge dq soit transportée le long de la trajectoire du point d'affixe s_0 au point d'affixe s_1. L'entropie variera de

$$d\mathrm{S} = dq \int_{s_0}^{s_1} \lambda \frac{d\mathrm{T}}{ds}\, ds.$$

Supposons que les points d'affixes s_0 et s_1 soient à la même température; entre ces deux points, plaçons un fil de même substance que le conducteur considéré et ayant la même température en tous ses points; supposons que l'on fasse revenir la charge dq du point s_1 au

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, IIIe Partie, Ch. I, § I.

point s_0 suivant ce fil; nous savons que, dans cette modification, l'entropie du système ne variera pas. La variation totale subie par l'entropie du système est donc identique à la variation subie par l'entropie durant la première modification. Or, après l'ensemble des deux modifications, l'état final du système est identique à son état initial; la variation de l'entropie est nulle; par conséquent, la variation de l'entropie durant la première modification est aussi égale à zéro.

En d'autres termes, si les points s_0 et s_1 sont à la même température,

$$\int_{s_0}^{s_1} \lambda \frac{dT}{ds} ds = 0,$$

ce qui exige que, pour une substance déterminée, λ soit une fonction de la température seule, cette fonction pouvant d'ailleurs être différente pour des substances différentes.

Si nous désignons par $\mu(T)$ une fonction de la température dont la forme dépend de la substance étudiée, nous pourrons poser

$$ET\lambda = \mu(T).$$

Nous aurons alors

$$ET\,dS = \mu(T)\,dT\,dq$$

et, par conséquent,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{dq} E \int_M^N T\,dS &= \int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)\,dT, \\ \frac{1}{dq} E \int_P^Q T\,dS &= \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT, \\ \frac{1}{dq} E \int_R^{M'} T\,dS &= \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)\,dT. \end{aligned} \right.$$

Les équations (5) et (6) permettent d'écrire, lorsque le conducteur est formé d'un nombre limité de substances séparément homogènes, trois par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{dq} E \int_M^{M'} T\,dS = &- H_a(T_1) + H_b(T_1) - H_b(T_2) + H_c(T_2) \\ &+ \int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)\,dT + \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT + \int_{T}^{T_0} \mu_c(T)\,dT. \end{aligned}$$

Cette expression manque de symétrie. Nous pourrons la rendre plus symétrique en ajoutant aux deux membres

$$H - H' = H_a(T_0) - H_c(T_0)$$

Nous aurons alors, en effet,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{dq} E\int_M^{M'} T\,dS - (H' - H) = &\int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)\,dT - [H_a(T_1) - H_a(T_0)] \\ &+ \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT - [H_b(T_2) - H_b(T_1)] \\ &+ \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)\,dT - [H_c(T_0) - H_c(T_2)]. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité, mise sous cette forme, s'étend aisément au cas où la nature du conducteur varierait d'une manière continue; soit x un paramètre variant d'une manière continue et définissant la nature du conducteur en un point; les fonctions μ et H deviendraient des fonctions des deux variables T et x; T_1 se rapprochant indéfiniment de T_0, la différence

$$H(T_1) - H(T_0)$$

deviendrait

$$\frac{\partial}{\partial T} H(x, T)\,dT,$$

et l'on aurait

$$\frac{1}{dq} E\int_M^{M'} T\,dS - (H' - H) = \int_M^{M'} \mu(x, T)\,dT - \int_M^{M'} \frac{\partial H(x, T)}{\partial T}\,dT.$$

D'ailleurs on a

$$H' - H = \int_M^{M'} \frac{\partial H(x, T)}{\partial x}\,dx + \int_M^{M'} \frac{\partial H(x, T)}{\partial T}\,dT.$$

Si donc on pose

$$h(x, T) = \frac{\partial H(x, T)}{\partial x},$$

on aura

$$(8)\qquad \frac{1}{dq} E\int_M^{M'} T\,dS = \int_M^{M'} [\mu(x, T)\,dT + h(x, T)\,dx].$$

Les égalités (3), (4), (7) et (8) conduisent aux résultats suivants :

Si le conducteur est formé d'un certain nombre de substances différentes, trois par exemple, le travail non compensé produit par le passage d'une charge dq d'une extrémité M à une autre extrémité M′ a pour valeur

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T} = \Big\{ (\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') - [H_a(T_1) - H_a(T_0)] + \int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)\,dT \\ - [H_b(T_1) - H_b(T_2)] + \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT \\ - [H_c(T_0) - H_c(T_2)] + \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)\,dT \Big\}\, dq, \end{aligned}\right.$$

et la condition d'équilibre est la suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} (\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') = \int_{T_0}^{T} \mu_a(T)\,dT - [H_a(T_1) - H_a(T_0)] \\ + \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT - [H_b(T_2) - H_b(T_1)] \\ + \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)\,dT - [H_c(T_0) - H_c(T_2)]. \end{aligned}\right.$$

Lorsque la constitution du corps varie d'une manière continue, ces égalités sont remplacées par les suivantes :

$$(11)\quad d\mathfrak{T} = \Big\{ (\varepsilon V + \Theta + H) - (\varepsilon V' + \Theta' + H') + \int_{M}^{M'} [\mu(x, T)\,dT + h(x, T)\,dx] \Big\}\, dq,$$

$$(12)\quad (\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') = H' - H - \int_{M}^{M'} [\mu(x, T)\,dT + h(x, T)\,dx].$$

Ces résultats dérivent tous de l'application des principes de la Thermodynamique aux seules lois de Coulomb.

Bornons-nous, pour le moment, au cas où la nature du conducteur présente des discontinuités, et désignons par $\mathcal{E}$ le second membre de l'égalité (10), qui pourra s'écrire alors

$$(10')\qquad (\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') = \mathcal{E}.$$

Si les deux métaux qui terminent le conducteur étaient directement au contact, à la température T_0, la condition d'équilibre électrique entre ces métaux serait

$$(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') = 0. \tag{13}$$

La différence de niveau potentiel qui existe entre les deux métaux n'est donc pas la même dans les deux cas.

Dans le second cas, si l'on mettait les deux métaux en communication respectivement avec les deux plateaux d'un condensateur, ces deux plateaux, supposés de même nature, resteraient au même niveau potentiel; dans le premier cas, il s'établirait entre ces deux plateaux une différence de niveau potentiel égale à $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}$. Telles sont les conséquences générales qu'on peut déduire de l'application des seules lois de Coulomb au problème qui nous occupe.

Nous discuterons plus loin ces conséquences.

II. — Propositions fondamentales relatives au circuit fermé.

Si l'on ferme le circuit en réunissant les deux extrémités supposées à la température T_0 soit directement, soit par un fil dont tous les points sont à la température T_0, l'incompatibilité des deux conditions (10') et (13) montre que, si $\mathcal{E}$ n'est pas égal à zéro, l'équilibre sera impossible. Le circuit deviendra alors, au bout d'un certain temps, le siège d'un courant stationnaire dont il faut déterminer la grandeur.

Cette détermination résulte de la proposition suivante :

La force électromotrice, qui, dans le circuit fermé, tend à faire marcher le courant dans la direction qu'au § I *nous avons fait suivre à la charge dq a pour valeur* $\mathcal{E}$.

La démonstration de cette proposition ne repose pas seulement sur les lois de Coulomb; elle suppose encore deux autres propositions, qui nous ont déjà servi ailleurs à établir la relation qui existe entre la différence de niveau potentiel aux bornes d'une pile ouverte et la force électromotrice d'une pile fermée.

La première de ces propositions est une pure hypothèse; elle s'énonce de la manière suivante (¹) :

Soit un système composé de courants fermés, uniformes, constants et immobiles. Un des conducteurs qui constituent ce système est traversé par un courant d'intensité I. *Pendant le temps dt, une portion déterminée de ce conducteur est le siège d'une modification déterminée et, en même temps, elle est traversée, dans un sens déterminé, par une quantité d'électricité* I *dt. Le travail compensé et le travail non compensé effectués, pendant le temps dt, dans la portion considérée du conducteur, sont égaux respectivement au travail compensé et au travail non compensé qui seraient effectués si cette portion du conducteur subissait la même modification et si en même temps on déplaçait virtuellement, dans le sens du courant, au travers de ce conducteur, une charge* $dq = \mathrm{I}\,dt$, *toutes les autres charges que renferme le système demeurant immobiles.*

La seconde proposition est une généralisation de la loi expérimentale trouvée par Joule pour les conducteurs homogènes dont tous les points sont à la même température; elle s'énonce ainsi (²) :

Le travail non compensé produit pendant l'unité de temps dans un segment de conducteur traversé par un courant d'intensité I, *au sein d'un système formé de corps immobiles traversés par des courants fermés, uniformes, constants, invariables de forme et de position, est égal au produit de la résistance* R *du conducteur par le carré de l'intensité du courant.*

Ces deux lemmes nous donnent immédiatement la démonstration de la proposition que nous voulons établir.

D'après le premier de ces lemmes, le travail non compensé produit dans le circuit pendant le temps dt se déduit de la formule (9) en supposant que le point M′ soit relié avec le point M par un fil formé par exemple du métal a, et dont tous les points sont à la même température. On a alors

$$\varepsilon \mathrm{V} + \Theta = \varepsilon' \mathrm{V}' + \Theta'$$

et, par conséquent,

$$d\varpi = \mathcal{E}\mathrm{I}\,dt.$$

(¹) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, IIIᵉ Partie, Chap. III, § II.
(²) *Le potentiel thermodynamique et ses applications* (*Ibid.*).

D'autre part, d'après le second lemme, si l'on désigne par R la résistance du circuit fermé, on aura

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{RI}^2\,dt.$$

La comparaison de ces deux valeurs de $d\mathfrak{T}$ donne immédiatement

$$\mathcal{E} = \mathrm{RI}, \tag{14}$$

relation qui démontre la proposition qu'on avait en vue d'établir.

Les lemmes précédents permettent également d'étudier le dégagement de chaleur qu'un courant détermine dans une portion de conducteur dont les points sont à des températures différentes; nous avons étudié ailleurs les lois du dégagement de chaleur produit au voisinage des soudures, dégagement de chaleur qui a été découvert par Peltier; nous nous contenterons donc d'étudier ici le dégagement de chaleur produit dans un conducteur homogène.

Considérons un élément de longueur de ce conducteur. Pendant le temps dt, il est traversé par une quantité d'électricité $\mathrm{I}\,dt$. Soit $d\mathrm{Q}$ la quantité de chaleur dégagée pendant ce temps dans cet élément.

D'après l'égalité (1), on a

$$\begin{aligned} d\mathrm{Q} &= -\mathrm{T}\,d\mathrm{S} + \mathrm{T}\,d\mathrm{N} \\ &= \mathrm{A}(d\mathfrak{T} - \mathrm{ET}\,d\mathrm{S}). \end{aligned}$$

D'après le premier lemme, la valeur de $\mathrm{ET}\,d\mathrm{S}$ est celle que nous avons calculée au § I :

$$\mathrm{ET}\,d\mathrm{S} = \mathrm{I}\mu(\mathrm{T})\,d\mathrm{T}\,dt.$$

D'après le second lemme, si l'on désigne par $d\mathrm{R}$ la résistance de la portion de conducteur considérée, on a

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{I}^2\,d\mathrm{R}\,dt.$$

On a donc

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{AI}^2\,d\mathrm{R}\,dt - \mathrm{AI}\mu(\mathrm{T})\,d\mathrm{T}\,dt. \tag{15}$$

Le premier terme représente la quantité de chaleur dégagée d'après

la loi de Joule. Le second terme représente un dégagement de chaleur complémentaire qui a été découvert par Sir W. Thomson; ce dégagement de chaleur est proportionnel à l'intensité du courant; il change de signe lorsque le courant change de sens; il s'annule si la température est la même en tous les points du conducteur.

III. — Circonstances dans lesquelles les phénomènes thermo-électriques peuvent se produire.

Cherchons les circonstances dans lesquelles la force électromotrice $\mathcal{E}$ peut être différente de zéro, et où, par conséquent, le circuit fermé sera le siège d'un courant.

Supposons, en premier lieu, le circuit fermé formé d'un seul métal dont la température varie d'un point à un autre. Dans ce cas la force électromotrice a pour valeur

$$\mathcal{E}=\int_{T_0}^{T_0}\mu(T)\,dT-[H(T_0)-H(T_0)],$$

quantité qui est identiquement nulle. Donc *le seul état permanent qui puisse s'établir sur un circuit fermé formé d'un seul métal dont les divers points ont des températures différentes est l'état d'équilibre.*

Envisageons un circuit fermé formé de plusieurs métaux séparément homogènes, trois par exemple, et supposons que toutes les soudures soient à la même température; la force électromotrice a, en général, pour valeur

$$\begin{aligned}\mathcal{E}= &\int_{T_0}^{T_1}\mu_a(T)\,dT-[H_a(T_1)-H_a(T_0)]\\ &+\int_{T_1}^{T_2}\mu_b(T)\,dT-[H_b(T_2)-H_b(T_1)]\\ &+\int_{T_2}^{T_0}\mu_c(T)\,dT-[H_c(T_0)-H_c(T_2)]\end{aligned}$$

Si l'on a

$$T_0=T_1=T_2,$$

on trouve immédiatement

$$\mathcal{E} = 0.$$

Ainsi, *dans un circuit formé de plusieurs métaux dont toutes les soudures sont à la même température, le seul état permanent qui puisse s'établir, c'est l'état d'équilibre.*

Lorsque les soudures d'une chaîne formée de plusieurs métaux sont à des températures différentes, l'équilibre électrique est-il possible sur cette chaîne? Pour simplifier les raisonnements, supposons la chaîne formée seulement de deux métaux, le métal a et le métal c étant identiques. La question à résoudre est la suivante : La quantité $\mathcal{E}$, déterminée par la relation

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E} = &\int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)\,dT - [H_b(T_2) - H_b(T_1)] \\ &+ \int_{T_2}^{T_1} \mu_a(T)\,dT - [H_a(T_1) - H_a(T_2)], \end{aligned}\right.$$

peut-elle être égale à zéro?

Pour décider si l'égalité

$$\mathcal{E} = 0$$

est possible, nous devrons tenir compte de l'égalité qui exprime que, tandis qu'une charge électrique dq parcourt tout le circuit fermé, l'entropie du système ne varie pas. Cette égalité se déduit aisément de ce qui précède.

Lorsque la charge dq traverse la soudure à la température T_1, du métal a au métal b, l'entropie du système augmente de

$$\frac{A}{T_1}[H_b(T_1) - H_a(T_1)]\,dq.$$

Lorsque la charge dq parcourt ensuite le métal b, l'entropie augmente de

$$A\,dq \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mu_b(T)}{T}\,dT.$$

Lorsque, en troisième lieu, la charge dq traverse la soudure à la tem-

pérature T_2 du métal b au métal a, l'entropie augmente de

$$\frac{A}{T_2}[H_a(T_2) - H_b(T_2)]\,dq.$$

Lorsque, enfin, la charge dq parcourt le métal a pour revenir à son point de départ, l'entropie croît de

$$A\,dq\int_{T_2}^{T_1}\frac{\mu_a(T)}{T}\,dT.$$

L'égalité qui exprime que l'entropie ne varie pas est donc la suivante :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mu_a(T)}{T}\,dT - \left[\frac{H_a(T_2)}{T_2} - \frac{H_a(T_1)}{T_1}\right] \\ &-\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mu_b(T)}{T}\,dT + \left[\frac{H_b(T_2)}{T_2} - \frac{H_b(T_1)}{T_1}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit $\mathcal{E}$. Si l'on veut, en outre, que $\mathcal{E} = 0$, on devra avoir

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2}\mu_a(T)\,dT - [H_a(T_2) - H_a(T_1)] \\ &-\int_{T_1}^{T_2}\mu_b(T)\,dT + [H_b(T_2) - H_b(T_1)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces deux égalités peuvent-elles avoir lieu, quelles que soient les températures T_2 et T_1? Dans ce cas, les égalités

$$(19)\qquad \frac{\mu_a(T)}{T} - \frac{\mu_b(T)}{T} = \frac{d}{dT}\left[\frac{H_a(T)}{T} - \frac{H_b(T)}{T}\right],$$

$$(20)\qquad \mu_a(T) - \mu_b(T) = \frac{dH_a(T)}{dT} - \frac{dH_b(T)}{dT},$$

qu'on obtient en les différentiant soit par rapport à T_2, soit par rapport à T_1, doivent avoir lieu, quel que soit T.

Si l'on tient compte de l'égalité (20), l'égalité (19) donne

$$\Pi_a(T) = \Pi_b(T), \tag{21}$$

et l'égalité (20) devient alors

$$\mu_a(T) = \mu_b(T). \tag{22}$$

L'égalité (21) signifie que la quantité de chaleur que l'électricité dégage, en vertu du phénomène de Peltier, en passant du métal a au métal b, est nulle à toute température; l'égalité (22) signifie que le dégagement de chaleur qui constitue le phénomène de Thomson a identiquement la même valeur pour les deux métaux; ces conditions ne seront pas réalisées en général si les deux métaux sont différents. Donc, *sur une chaîne bimétallique dont les soudures sont à des températures différentes, l'équilibre n'est possible que pour des systèmes particuliers de valeurs des températures des deux soudures.*

En général, le système deviendra le siège d'un courant permanent; c'est la force électromotrice de ce courant thermo-électrique qu'il s'agit maintenant d'étudier.

IV. — Formules de Sir W. Thomson et de M. Clausius.

Sir W. Thomson [1] et M. Clausius [2] ont cherché les premiers la relation qui lie la force électromotrice d'un couple thermo-électrique aux températures des deux soudures.

M. Clausius admet que l'on peut appliquer le théorème de Carnot au dégagement de chaleur produit aux deux soudures en vertu des

---

[1] Sir W. THOMSON, *On a mechanical theory of thermo-electric currents* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. III, p. 529). — *On the dynamical theory of heat. Thermo-electric currents* (*Edimbourg Royal Society Trans.*, XXI, p. 123; 1857. — *Edimb. Roy. Soc. Proc.*, t. III, p. 91; 1857).

[2] R. CLAUSIUS, *Sur l'application de la Théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques* (*Poggendorff's Annalen*, t. XC, p. 513. — *Théorie mécanique de la chaleur*, traduit par Folie, t. II, p. 126).

lois découvertes par Peltier; il admet en outre que la force électromotrice du couple est proportionnelle à la différence de ces deux dégagements de chaleur. Il arrive alors à la conclusion suivante :

« Dans toute chaîne composée de deux substances homogènes, la force électromotrice doit être proportionnelle à la différence de température qui a lieu entre les deux contacts, ce que l'on peut regarder en général comme la règle dans le cas où les différences de température ne sont pas trop considérables..... Néanmoins, à elle seule, elle ne représente pas les phénomènes avec une exactitude complète; en analysant ceux-ci, surtout dans le cas où il se présente de hautes températures, on trouve en effet des écarts notables qui montrent que, dans la production de ces phénomènes, il y a des circonstances accessoires qui agissent, et dont il n'a pas été tenu compte dans la déduction de ces expressions. Ce fait se manifeste surtout dans une chaîne composée de fer et de cuivre : on sait que, lorsqu'on échauffe progressivement l'un des contacts, l'intensité du courant, au lieu d'augmenter constamment, décroît à partir d'une certaine température, et qu'à la chaleur rouge il y a même renversement du courant [1] ».

Sir W. Thomson a adopté le même point de départ que M. Clausius; mais, au lieu d'appliquer le théorème de Carnot au seul dégagement de chaleur découvert par Peltier, il a fait entrer en ligne de compte le dégagement de chaleur analogue qui se produit entre deux parties inégalement chaudes d'un même métal. Il a établi ainsi des formules qui ne rencontrent plus dans l'expérience aucune contradiction.

Mais la voie suivie dans l'établissement de ces formules permet de douter si elles représentent des lois exactes, quelle que soit la grandeur de la force électromotrice, ou bien si elles représentent seulement des lois limites exactes pour les forces électromotrices infiniment faibles, et plus ou moins approchées pour les forces électromotrices de grandeur finie. Les propositions établies dans les paragraphes précédents vont nous permettre de démontrer que les formules de Sir W. Thomson sont exactes, quelle que soit la valeur de la force électromotrice.

La force électromotrice est donnée par l'égalité (16).

---

[1] Clausius, *Théorie mécanique de la chaleur*, trad. Folie, t. II, p. 150.

Posons

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_a(T) = \mu_a(T) - \dfrac{dH_a(T)}{dT}, \\ \mathfrak{F}_b(T) = \mu_b(T) - \dfrac{dH_b(T)}{dT}. \end{cases}$$

L'égalité (16) pourra être remplacée par la suivante :

$$(24)\qquad \mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} [\mathfrak{F}_b(T) - \mathfrak{F}_a(T)]\, dT.$$

Mais l'égalité (17), qui exprime que l'entropie demeure invariable, a lieu quelles que soient les températures T_1 et T_2. On a donc, quel que soit T,

$$(19)\qquad \frac{\mu_a(T)}{T} - \frac{d}{dT}\frac{H_a(T)}{T} = \frac{\mu_b(T)}{T} - \frac{d}{dT}\frac{H_b(T)}{T},$$

ce qui peut s'écrire, en vertu des égalités (23),

$$\mathfrak{F}_a(T) + \frac{H_a(T)}{T} = \mathfrak{F}_b(T) + \frac{H_b(T)}{T}.$$

L'égalité (24) devient alors

$$(25)\qquad \mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{H_a(T) - H_b(T)}{T}\, dT.$$

C'est la formule de Sir W. Thomson.

Tous les Traités de Physique exposent les conséquences que Sir W. Thomson a déduites de cette formule au moyen de considérations géométriques très simples ; il est donc inutile que nous nous y arrêtions ici. Nous allons chercher seulement quelles conséquences on peut en déduire si l'on néglige le dégagement de chaleur qui constitue le phénomène de Thomson, comme M. Clausius l'a fait dans son Mémoire sur les courants thermo-électriques.

Si l'on suppose nul le dégagement de chaleur qui constitue le phénomène de Thomson, on a

$$\mu_a(T) = 0,$$
$$\mu_b(T) = 0.$$

L'égalité (19) devient alors

$$\frac{d}{dT}\frac{H_a(T) - H_b(T)}{T} = 0,$$

ou bien, en désignant par L une constante particulière aux deux métaux a et b,

$$H_a(T) - H_b(T) = LT. \tag{26}$$

L'égalité (25) devient alors

$$\mathcal{E} = L(T_2 - T_1). \tag{27}$$

L'égalité (26) exprime que le dégagement de chaleur qui se produit, conformément à la découverte de Peltier, lorsque l'électricité passe du métal a au métal b ou inversement, est proportionnelle à la température absolue du contact; l'égalité (27) montre que la force électromotrice du couple est proportionnelle à la différence de température des deux soudures. Lors donc qu'on se place dans les conditions que M. Clausius a supposées réalisées, on retrouve les résultats obtenus par ce physicien.

Les raisonnements précédents permettent donc de donner une théorie complète des phénomènes thermo-électriques. Pour trouver la différence de niveau potentiel qui existe aux deux extrémités d'une chaîne thermo-électrique ouverte, nous avons fait usage de propositions dont la démonstration suppose exclusivement les principes fondamentaux de la Thermodynamique et les lois des actions entre corps électrisés découvertes par Coulomb; c'est seulement pour établir le relation, admise par tous les physiciens, qui lie cette différence de niveau à la force électromotrice du circuit fermé, que nous avons eu à invoquer deux autres principes. Nous pensons que cette marche, analogue à

celle que nous avons suivie, dans un autre travail, pour étudier la force électromotrice de la pile voltaïque, ne saurait laisser de doute sur l'exactitude des résultats obtenus. Il nous reste à montrer que cette méthode permet d'expliquer certains phénomènes dont la théorie n'ait pas encore été abordée ; c'est ce que nous ferons dans la seconde Partie de ce Mémoire, en étudiant les phénomènes pyro-électriques.

CONSIDÉRATIONS NOUVELLES

SUR LE

DÉTERMINANT DE SMITH ET MANSION,

PAR M. ERNEST CESÀRO,

ÉTUDIANT A L'UNIVERSITÉ DE ROME.

Le déterminant de Smith et Mansion est celui dont chaque élément égale une fonction quelconque, $F(i, j)$, du plus grand commun diviseur des indices i et j. Soit $\mu(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à l'unité pour $x = 1$ et à $(-1)^\tau$ lorsque x est le produit de τ facteurs premiers, inégaux. Définissons une autre fonction f par la relation

$$f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right) F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right) F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right) F(3) + \ldots.$$

On sait que, inversement, $F(x)$ est la somme des valeurs de la fonction f, qui correspondent aux diviseurs de x. Par exemple, avec les notations de Gauss et d'Euler, pour $f(x) = \varphi(x)$, on a $F(x) = x$; pour $f(x) = x$, on a $F(x) = \int x$, etc. Cela étant, M. Mansion a démontré que le déterminant

$$\begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \ldots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \ldots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \ldots & F(3,n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \ldots & F(n,n) \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\Delta_n = f(1) f(2) f(3) \ldots f(n).$$

Dans le *Journal de Battaglini* (1885) et dans les *Nouvelles Annales*, nous avons poursuivi l'étude du déterminant Δ_n. Nous allons faire d'au-

tres considérations en cherchant ce que devient Δ_n lorsqu'on y supprime les colonnes et les lignes, dont les indices sont respectivement $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ et $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$. Le déterminant qui en résulte sera représenté par la notation

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & j_3 & \ldots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)}.$$

L'étude de Δ_n est basée sur la propriété suivante :

La somme

$$\mu\left(\frac{n}{1}\right)\mathrm{F}(1, x) + \mu\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{F}(2, x) + \mu\left(\frac{n}{3}\right)\mathrm{F}(3, x) + \ldots,$$

nulle en général, est égale à $f(n)$ lorsque x est divisible par n.

Supposons d'abord $\nu = 2$ et, dans le déterminant modifié, ajoutons à la dernière colonne toutes les autres, respectivement multipliées par $\mu\left(\frac{n}{1}\right), \mu\left(\frac{n}{2}\right), \mu\left(\frac{n}{3}\right), \ldots$. Le $r^{\text{ième}}$ élément devient

$$-\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mathrm{F}(i_1, r) - \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mathrm{F}(i_2, r);$$

mais on doit, en outre, ajouter $f(n)$ au dernier élément. En opérant de même sur les lignes, on trouve que le $r^{\text{ième}}$ élément de la dernière ligne est

$$-\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(j_1, r) - \mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(j_2, r),$$

tandis que le dernier élément se change en

$$\begin{aligned} f(n) &+ \mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(i_1, j_1) + \mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(i_1, j_2) \\ &+ \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\mathrm{F}(i_2, j_1) + \mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\mathrm{F}(i_2, j_2). \end{aligned}$$

Il en résulte, en supposant $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = f(n) & \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &+ (-1)^{i_1+j_1}\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} - (-1)^{i_1+j_2}\mu\left(\frac{n}{i_1}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\begin{bmatrix} i_2 \\ j_1 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &- (-1)^{i_2+j_1}\mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_1}\right)\begin{bmatrix} i_1 \\ j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + (-1)^{i_2+j_2}\mu\left(\frac{n}{i_2}\right)\mu\left(\frac{n}{j_2}\right)\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Soit $A_{ij}^{(n)}$ le complément algébrique de l'élément $F(i,j)$ dans Δ_n, de sorte que

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^{i+j} A_{ij}^{(n)}.$$

Après avoir posé

$$\mu\left(\frac{x}{i}\right)\mu\left(\frac{x}{j}\right) = f(x)\, Q_{ij}^{(x)},$$

la dernière formule devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(n)}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &+ (-1)^{\rho}\left[Q_{i_1 j_1}^{(n)} A_{i_2 j_2}^{(n-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(n)} A_{i_2 j_1}^{(n-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(n)} A_{i_1 j_2}^{(n-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(n)} A_{i_1 j_1}^{(n-1)}\right], \end{aligned}$$

où, pour abréger, ρ désigne la somme $i_1 + i_2 + j_1 + j_2$. Dans le *Journal de Battaglini*, nous avons démontré que l'on peut écrire

$$A_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}^{(n)} \Delta_n, \qquad \text{où} \qquad \alpha_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{r=n} Q_{ij}^{(r)}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_{n-1}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} \\ &+ (-1)^{\rho}\left[Q_{i_1 j_1}^{(n)} \alpha_{i_2 j_2}^{(n-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(n)} \alpha_{i_2 j_1}^{(n-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(n)} \alpha_{i_1 j_2}^{(n-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(n)} \alpha_{i_1 j_1}^{(n-1)}\right]. \end{aligned}$$

En supposant que i_2 ne soit inférieur à aucun des nombres i_1, j_1, j_2, on peut changer n en $n-1$, $n-2$, ..., i_2+1. Il vient, par addition,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_{i_2}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} \\ &+ (-1)^{\rho}\sum_{r=i_2+1}^{r=n}\left[Q_{i_1 j_1}^{(r)} \alpha_{i_2 j_2}^{(r-1)} - Q_{i_1 j_2}^{(r)} \alpha_{i_2 j_1}^{(r-1)} - Q_{i_2 j_1}^{(r)} \alpha_{i_1 j_2}^{(r-1)} + Q_{i_2 j_2}^{(r)} \alpha_{i_1 j_1}^{(r-1)}\right]. \end{aligned}$$

Appliquons les mêmes transformations au cas de $n = i_2$. Nous trouvons sans peine

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} = -(-1)^{\rho}\mu\left(\frac{i_2}{j_1}\right) A_{i_1 j_2}^{(i_2-1)} + (-1)^{\rho}\mu\left(\frac{i_2}{j_2}\right) A_{i_1 j_1}^{(i_2-1)}.$$

ou bien, en observant que $\mu(1)=1$,

$$\frac{1}{\Delta_{i_2}}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(i_2)} = (-1)^\rho\left[-Q^{(i_2)}_{i_2 j_1}\alpha^{(i_2-1)}_{i_1 j_2} + Q^{(i_2)}_{i_2 j_2}\alpha^{(i_2-1)}_{i_1 j_1}\right]$$

Conséquemment, si nous concevons que la quantité $\alpha^{(n)}_{ij}$ soit nulle lorsque n est inférieur à l'un des indices, ce qui est d'accord avec l'expression que nous en avons donnée en fonction des quantités Q, nous pourrons écrire

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^\rho \sum_{r=2}^{r=n}\left[Q^{(r)}_{i_1 j_1}\alpha^{(r-1)}_{i_2 j_2} - Q^{(r)}_{i_1 j_2}\alpha^{(r-1)}_{i_2 j_1} - Q^{(r)}_{i_2 j_1}\alpha^{(r-1)}_{i_1 j_2} + Q^{(r)}_{i_2 j_2}\alpha^{(r-1)}_{i_1 j_1}\right].$$

Or il est évident que

$$\sum_{r=2}^{r=n}\left[Q^{(r)}_{\alpha\beta}\sum_{s=1}^{s=r-1}Q^{(s)}_{\gamma\delta} + Q^{(r)}_{\gamma\delta}\sum_{s=1}^{s=r-1}Q^{(s)}_{\alpha\beta}\right] = \sum_{r=1}^{r=n}Q^{(r)}_{\alpha\beta}\sum_{r=1}^{r=n}Q^{(r)}_{\gamma\delta} - \sum_{r=1}^{r=n}Q^{(r)}_{\alpha\beta}Q^{(r)}_{\gamma\delta}.$$

En conséquence, si l'on observe que

$$Q^{(x)}_{\alpha\beta}\,Q^{(x)}_{\gamma\delta} = \frac{\mu\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mu\left(\frac{x}{\beta}\right)\mu\left(\frac{x}{\gamma}\right)\mu\left(\frac{x}{\delta}\right)}{f^2(x)} = Q^{(x)}_{\alpha\delta}\,Q^{(x)}_{\beta\gamma},$$

on trouve définitivement

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix}^{(n)} = (-1)^\rho\left[\alpha^{(n)}_{i_1 j_1}\alpha^{(n)}_{i_2 j_2} - \alpha^{(n)}_{i_1 j_2}\alpha^{(n)}_{i_2 j_1}\right].$$

La relation que nous venons d'obtenir se déduit d'une autre plus générale, que nous fournit immédiatement la théorie des déterminants réciproques. Observons d'abord que, d'après les notations adoptées, le complément algébrique du mineur

$$\begin{vmatrix} F(i_1,j_1) & F(i_2,j_1) & F(i_3,j_1) & \dots & F(i_\nu,j_1) \\ F(i_1,j_2) & F(i_2,j_2) & F(i_3,j_2) & \dots & F(i_\nu,j_2) \\ F(i_1,j_3) & F(i_2,j_3) & F(i_3,j_3) & \dots & F(i_\nu,j_3) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ F(i_1,j_\nu) & F(i_2,j_\nu) & F(i_3,j_\nu) & \dots & F(i_\nu,j_\nu) \end{vmatrix}$$

est

$$(-1)^\rho\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)}, \qquad \text{où} \qquad \rho = i_1+i_2+\dots+i_\nu+j_1+j_2+\dots+j_\nu.$$

On sait, d'ailleurs, que le mineur homologue, dans le déterminant réciproque de Δ_n, est précisément égal au complément dont il s'agit, multiplié par la $(\nu - 1)^{\text{ième}}$ puissance de Δ_n. On en déduit aisément

$$\frac{(-1)^\rho}{f(1)f(2)\dots f(n)}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & \dots & j_\nu \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1}^{(n)} & \alpha_{i_2j_1}^{(n)} & \alpha_{i_3j_1}^{(n)} & \dots & \alpha_{i_\nu j_1}^{(n)} \\ \alpha_{i_1j_2}^{(n)} & \alpha_{i_2j_2}^{(n)} & \alpha_{i_3j_2}^{(n)} & \dots & \alpha_{i_\nu j_2}^{(n)} \\ \alpha_{i_1j_3}^{(n)} & \alpha_{i_2j_3}^{(n)} & \alpha_{i_3j_3}^{(n)} & \dots & \alpha_{i_\nu j_3}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_1j_\nu}^{(n)} & \alpha_{i_2j_\nu}^{(n)} & \alpha_{i_3j_\nu}^{(n)} & \dots & \alpha_{i_\nu j_\nu}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Arrêtons-nous de nouveau au cas de $\nu = 2$, et supposons $i_1 = j_1 = 1$, $i_2 = j_2 = 2$, de sorte que le déterminant résultant est celui qui a $F(i+2, j+2)$ pour élément général. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)} &= \sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu^2(r)}{f(r)}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu^2\left(\frac{r}{2}\right)}{f(r)} - \left[\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\mu(r)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)}{f(r)}\right]^2 \\ &= \sum_{r,s}\frac{\left[\mu(r)\,\mu\left(\frac{s}{2}\right) - \mu(s)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2}{f(r)f(s)}, \end{aligned}$$

où r et s doivent varier, séparément, de 1 à n. Si l'on veut considérer exclusivement les valeurs de r et de s, qui donnent des termes différents de zéro, on doit remarquer qu'elles ne sont liées à n par d'autres conditions que de lui être inférieures, de sorte qu'il est possible de les calculer une fois pour toutes, en supprimant, ensuite, celles qui surpassent n. Le numérateur

$$\left[\mu(r)\,\mu\left(\frac{s}{2}\right) - \mu(s)\,\mu\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2$$

ne peut avoir que les valeurs 1 et 0 : cherchons pour quelles valeurs de r et s il est égal à l'unité. Si l'on désigne par u_1, u_2, u_3, ... les termes de la série

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ \dots,$$

qui sont impairs et privés de facteurs carrés, on reconnaît que trois hypothèses seulement sont possibles :

$$r = u_i, \quad s = 2u_j; \qquad r = u_i, \quad s = 4u_j; \qquad r = 2u_i, \quad s = 4u_j.$$

Posons, pour abréger,

$$A = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(u_r)}, \qquad B = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(2u_r)}, \qquad C = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{f(4u_r)}.$$

On a

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)} = BC + CA + AB,$$

en faisant $f(x) = \infty$ pour $x > n$, ce qui est permis, vu qu'il n'y a pas lieu de considérer, dans le déterminant donné, des valeurs de $f(x)$, pour lesquelles x surpasse n. Ainsi, dans le cas de $n = 5$, on trouve

$$\begin{vmatrix} F(3,3) & F(3,4) & F(3,5) \\ F(4,3) & F(4,4) & F(4,5) \\ F(5,3) & F(5,4) & F(5,5) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(1)+f(3) & f(1) & f(1) \\ f(1) & f(1)+f(2)+f(4) & f(1) \\ f(1) & f(1) & f(1)+f(5) \end{vmatrix}$$

$$= f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)\left[\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(1)f(4)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \frac{1}{f(2)f(4)} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{f(2)f(5)} + \frac{1}{f(3)f(4)} + \frac{1}{f(4)f(5)}\right].$$

Soit encore, n étant quelconque, $f(x) = x^k$, et posons

$$s_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \dots$$

On obtient aisément

$$A = 2^k B = 2^{2k} C = \frac{2^k}{2^k+1}\,\frac{s_k}{s_{2k}},$$

et, par suite, pour n indéfiniment grand,

$$\lim \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{(n)}}{(1.\ 2.\ 3\dots n)^k} = \frac{2^{2k} + 2^k + 1}{2^k(2^k+1)^2}\left(\frac{s_k}{s_{2k}}\right)^2.$$

En particulier, pour $k = 2$, on trouve que, *si* D_n *est le déterminant, de degré* $n - 2$, *dont chaque élément, aux indices* i *et* j, *représente la somme des carrés des diviseurs communs à* $i + 2$ *et* $j + 2$, *on a*

$$\lim \left(\frac{e}{n}\right)^{2n+1} D_n = \frac{189e}{2\pi^3}.$$

Nous trouvons aussi, en faisant $\nu = 3$, l'égalité

$$\frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{(n)} = \alpha_{11}^{(n)}\alpha_{22}^{(n)}\alpha_{33}^{(n)} + 2\alpha_{23}^{(n)}\alpha_{31}^{(n)}\alpha_{12}^{(n)} - \left\{\alpha_{11}^{(n)}[\alpha_{23}^{(n)}]^2 + \alpha_{22}^{(n)}[\alpha_{31}^{(n)}]^2 + \alpha_{33}^{(n)}[\alpha_{12}^{(n)}]^2\right\}.$$

Soient $v_1, v_2, v_3, \ldots$ les termes de la série 1, 5, 7, 11, 13, 17, ..., premiers ou produits de nombres premiers, inégaux, autres que 2 et 3. Posons

$$\sigma_m = \frac{1}{f(mv_1)} + \frac{1}{f(mv_2)} + \frac{1}{f(mv_3)} + \ldots.$$

En supposant $f(x) = \infty$, pour $x > n$, on trouve

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(n)} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6, & \alpha_{23}^{(n)} &= \sigma_6, \\ \alpha_{22}^{(n)} &= \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_6 + \sigma_{12}, & \alpha_{31}^{(n)} &= -(\sigma_3 + \sigma_6), \\ \alpha_{33}^{(n)} &= \sigma_3 + \sigma_6 + \sigma_9 + \sigma_{18}, & \alpha_{12}^{(n)} &= -(\sigma_2 + \sigma_6). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{(n)} = {} & \sigma_2\sigma_3\sigma_6 + \sigma_1\sigma_3\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_6 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_3 + \sigma_6)(\sigma_4 + \sigma_{12}) + (\sigma_1 + \sigma_3)(\sigma_2 + \sigma_6)(\sigma_9 + \sigma_{18}) \\ & + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6)(\sigma_4 + \sigma_{12})(\sigma_9 + \sigma_{18}). \end{aligned}$$

On voit donc que le second membre se réduit à une somme de quantités analogues à $\frac{1}{f(x)f(y)f(z)}$, où x, y, z sont trois nombres non supérieurs à n, et différents entre eux. Si l'on cherche à généraliser par induction les propriétés qui précèdent, on est conduit à énoncer le théorème que voici :

Le déterminant, de degré $n - \nu$, dont l'élément général est $F(i+\nu, j+\nu)$, *est égal à la somme de certains produits, $n - \nu$ à $n - \nu$, des nombres* $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$.

Pour $\nu = 0$, on retrouve immédiatement le théorème de M. Mansion. On a vu que le théorème est encore vrai pour $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$. Dans le cas de $\nu = n - 1$, le déterminant se réduit à $F(n)$, et il doit être égal à la somme de quelques-uns des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, ce qui est exact : il suffit que x divise n pour que $f(x)$ fasse partie de la somme en question. On vérifie facilement le théorème dans les cas de $\nu = n - 2$, $n - 3$, ... Subsiste-t-il en général? Quoi qu'il en soit, on

aurait tort de croire que, plus généralement, tout mineur de Δ_n, d'ordre ν, est, en valeur absolue, une somme de produits ν à ν des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Il est, en effet, bien aisé de trouver des mineurs qui ne possèdent pas cette propriété. Il en est ainsi, par exemple, du mineur

$$\begin{vmatrix} F(i,j) & F(i,n) \\ F(n,j) & F(n,n) \end{vmatrix},$$

toutes les fois que n a des facteurs communs avec les quotients de i et de j par leur plus grand commun diviseur. Cependant, les mineurs de l'ordre $n-1$ satisfont toujours au théorème, ainsi que ceux du premier ordre. Reprenons, en effet, la formule

$$A_{ij}^{(n)} = \Delta_n \sum_r \frac{\mu\left(\frac{r}{i}\right)\mu\left(\frac{r}{j}\right)}{f(r)},$$

où l'on suppose $f(x) = \infty$, pour $x > n$. Si m est le plus petit multiple commun de i et de j, et que l'on représente par i' et j' les quotients de i et de j par leur plus grand diviseur commun, il est clair que l'on peut écrire

$$A_{ij}^{(n)} = \mu(i'j')\Delta_n \sum_r \frac{1}{f(mr)},$$

en sous-entendant que les valeurs attribuées à r soient premières avec i' et j', et n'admettent pas de facteurs carrés. Si $i'j'$ admet des facteurs carrés, $A_{ij}^{(n)}$ est nul, quel que soit n : dans le cas contraire, on voit que $A_{ij}^{(n)}$ est égal, en valeur absolue, à la somme de certains produits $n-1$ à $n-1$ des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. En particulier,

$$A_{ii}^{(n)} = f(1)f(2)\ldots f(n)\left[\frac{1}{f(i)} + \frac{1}{f(2i)} + \frac{1}{f(3i)} + \frac{1}{f(5i)} + \frac{1}{f(6i)} + \ldots\right].$$

L'expression de $\alpha_{ij}^{(n)}$ est très utile pour répondre à la question posée plus haut. On devrait étudier, en effet, le déterminant

$$\nabla_\nu^{(n)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(n)} & \alpha_{12}^{(n)} & \alpha_{13}^{(n)} & \ldots & \alpha_{1\nu}^{(n)} \\ \alpha_{21}^{(n)} & \alpha_{22}^{(n)} & \alpha_{23}^{(n)} & \ldots & \alpha_{2\nu}^{(n)} \\ \alpha_{31}^{(n)} & \alpha_{32}^{(n)} & \alpha_{33}^{(n)} & \ldots & \alpha_{3\nu}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1}^{(n)} & \alpha_{\nu 2}^{(n)} & \alpha_{\nu 3}^{(n)} & \ldots & \alpha_{\nu\nu}^{(n)} \end{vmatrix},$$

dont la $i^{\text{ième}}$ colonne peut être écrite comme il suit :

$$\mu\left(\frac{1}{1}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{1}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{1}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{1}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,$$
$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{2}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{2}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{2}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,$$
$$\mu\left(\frac{1}{3}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{3}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{3}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{3}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu\left(\frac{1}{n}\right)\mu\left(\frac{1}{i}\right)\xi_1+\mu\left(\frac{2}{n}\right)\mu\left(\frac{2}{i}\right)\xi_2+\mu\left(\frac{3}{n}\right)\mu\left(\frac{3}{i}\right)\xi_3+\ldots+\mu\left(\frac{n}{n}\right)\mu\left(\frac{n}{i}\right)\xi_n.$$

Pour simplifier l'écriture, nous représentons par ξ_r l'inverse de $f(r)$. Cela étant, on voit que le déterminant considéré est décomposable en n^ν autres déterminants. Si l'on ne considère, dans la $i^{\text{ième}}$ colonne, que les termes contenant ξ_{ε_i}, le déterminant partiel correspondant a pour élément général

$$\mu\left(\frac{\varepsilon_i}{j}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_i}{i}\right)\xi_{\varepsilon_i}.$$

Il est donc égal à

$$\xi_{\varepsilon_1}\xi_{\varepsilon_2}\xi_{\varepsilon_3}\ldots\xi_{\varepsilon_\nu}\mu\left(\frac{\varepsilon_1}{1}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\mu\left(\frac{\varepsilon_3}{3}\right)\ldots\mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)\mathrm{M}_{(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\ldots,\,\varepsilon_\nu)},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{M}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_\nu)}=\begin{vmatrix} \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{1}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{1}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{3}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{3}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\nu}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right) \end{vmatrix}.$$

Si deux quantités ε sont égales entre elles, M est nul. Par suite, le déterminant ∇ est bien une combinaison linéaire des produits ν à ν des quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; mais il faudrait faire voir que chacun de ces produits entre dans l'expression de ∇, avec le coefficient 0 ou 1. Du reste, ayant pris ν nombres inégaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, non supérieurs à n, il est facile de chercher le coefficient du produit $\xi_{\varepsilon_1}, \xi_{\varepsilon_2}, \ldots, \xi_{\varepsilon_\nu}$. Per-

mutons les indices $1, 2, 3, \ldots, \nu$ des quantités ε de toutes les manières possibles : suivant que la permutation $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_\nu$ obtenue est de la première ou de la seconde classe, on a

$$\mathbf{M}_{(\varepsilon_{\tau_1}, \varepsilon_{\tau_2}, \ldots, \varepsilon_{\tau_\nu})} = \pm \mathbf{M}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}.$$

Il en résulte que le coefficient cherché est

$$\mathbf{M}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)} \sum \pm \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_1}}{1}\right) \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_2}}{2}\right) \cdots \mu\left(\frac{\varepsilon_{\tau_\nu}}{\nu}\right) = \mathbf{M}^2_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}.$$

Conséquemment

$$\nabla_\nu^{(n)} = \sum \frac{\mathbf{M}^2_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu)}}{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) f(\varepsilon_3) \ldots f(\varepsilon_\nu)},$$

les nombres ε formant, de toutes les manières possibles, une combinaison de ν nombres entiers, non supérieurs à n. Il resterait donc à rechercher si les déterminants $\mathbf{M}$ peuvent avoir d'autres valeurs que $0, +1, -1$.

Il serait intéressant d'étudier, plus généralement, le déterminant

$$\mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu)} = \begin{vmatrix} \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_1}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_1}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_1}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_2}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_2}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_2}\right) \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_3}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_3}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_3}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\eta_\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_2}{\eta_\nu}\right) & \mu\left(\frac{\varepsilon_3}{\eta_\nu}\right) & \cdots & \mu\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\eta_\nu}\right) \end{vmatrix},$$

qui, probablement, ne diffère pas de l'unité, en valeur absolue, à moins qu'il ne soit nul. En opérant comme ci-dessus, on trouve facilement la formule

$$(-1)^\rho \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_\nu \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_\nu \end{vmatrix}^n = \sum \frac{f(1) f(2) \ldots f(n)}{f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_\nu)} \mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)} \mathfrak{M}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)}_{(j_1, j_2, \ldots, j_\nu)},$$

d'après laquelle tout mineur de Δ_n serait une somme *algébrique* de produits ν à ν des nombres $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, l'ordre du mineur étant ν.

Nous pourrions, d'ailleurs, par la simple dérivation des déterminants ∇, relativement à chaque variable ξ, nous assurer que celle-ci entre linéairement dans le déterminant considéré. Nous reprendrons bientôt l'étude des déterminants $\mathfrak{M}$, et d'autres déterminants arithmétiques qui s'en déduisent.

FIN DU TOME II DE LA III^e SÉRIE.

ANNALES SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUPPLÉMENT

AU

TOME II — ANNÉE 1885

(TROISIÈME SÉRIE).

ÉTUDE

SUR

LES SÉRIES ENTIÈRES

PAR RAPPORT

A PLUSIEURS VARIABLES IMAGINAIRES INDÉPENDANTES,

PAR M. S. DAUTHEVILLE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, MAITRE DE CONFÉRENCES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

INTRODUCTION.

On connait les travaux récents de M. Weierstrass sur les fonctions analytiques uniformes de variables imaginaires. Dans le cas de plusieurs variables indépendantes, on fait un fréquent usage des séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes des variables. Il m'a paru qu'il ne serait pas sans utilité de réunir les propriétés les plus importantes de ces séries, en les démontrant d'une manière rigoureuse, et de montrer par quelques théorèmes le profit qu'on peut en tirer pour la théorie des fonctions de plusieurs variables. C'est là le but de ce travail.

Un premier Chapitre est consacré aux définitions et à la démonstration de quelques théorèmes préliminaires.

Dans le second Chapitre, on démontre qu'une série qui s'annule pour l'origine des coordonnées peut être mise, dans un *domaine* convenablement choisi de ce point, sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est une série qui ne s'annule en aucun point du domaine,

et l'autre un polynôme entier relativement à l'une des variables. Ce théorème, dû à M. Weierstrass, sera d'un usage fréquent dans la suite. Nous en avons déduit la démonstration de plusieurs conséquences, relatives aux zéros d'une série et aux zéros communs à deux séries.

La divisibilité des séries fait l'objet de la troisième Partie. S_0 et S_1 représentant deux séries, si l'on peut fixer un domaine de l'origine dans lequel on ait $S_0 = S_1 S_2$, S_2 étant une nouvelle série, M. Weierstrass dit que S_0 est *divisible* par S_1. Je donne, d'après ce géomètre, les conditions pour qu'une série soit divisible par une autre, et les conditions pour que deux séries admettent des diviseurs communs. Lorsque deux séries admettent des diviseurs communs, on peut former une troisième série qui possède, relativement aux deux premières, des propriétés tout à fait analogues aux propriétés du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. J'ai insisté sur l'analogie qui existe entre les théorèmes relatifs à la divisibilité des polynômes et ceux qui se rapportent à la divisibilité des séries. Je donne, à ce propos, quelques théorèmes que je crois nouveaux; en particulier ceux qui permettent de définir le plus petit multiple commun de deux séries.

Dans la quatrième Partie, les propriétés des séries sont appliquées à l'étude des points singuliers des fonctions uniformes de plusieurs variables imaginaires indépendantes. A ce sujet, pour citer un exemple, je démontre un théorème que l'on peut considérer comme une généralisation d'un théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions d'une seule variable. En se plaçant à un point de vue différent, M. Appell a indiqué ([1]) une autre généralisation du même théorème. Je termine en prouvant que toute fonction dépourvue de points singuliers essentiels est une fraction rationnelle. Ce théorème, qui n'est pas sans importance, a été énoncé par M. Weierstrass. Je ne crois pas qu'on en ait encore donné une démonstration complète.

Je dois ajouter que j'ai pris les premiers éléments de mon travail dans une Note communiquée par M. Weierstrass à la Société mathématique de Berlin : *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen*

([1]) *Acta mathematica*, t. II, Cahier I, p. 71, et t. IV, Cahier IV, p. 326.

mehrerer veränderlichen sich beziehende Sätze, zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin zur Veröffentlichung übergeben von Professor Dr C. Weierstrass (1).

I.

Définitions.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n variables imaginaires indépendantes. Nous les représenterons géométriquement sur des plans différents. Si a_1, $a_2, \ldots, a_n$ sont n valeurs attribuées respectivement à chacune de ces variables, on dit que ce système de valeurs constitue *un point*, et l'on appelle ce point le *point a*.

Sur le plan où est figurée la variable z_1 imaginons une aire A_1, sur le plan de z_2 une aire A_2, etc., et enfin sur le plan de z_n une aire A_n. On considère l'ensemble de ces aires $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme formant l'*aire* A. On dit qu'un point est *pris dans l'aire* A lorsqu'il est formé par un système de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivement représentées géométriquement par des points situés, le premier dans l'aire A_1, le second dans l'aire A_2, etc., le dernier dans l'aire A_n.

On nomme, en particulier, *domaine* δ *du point a* l'aire formée par les cercles décrits sur le plan de chacune des variables avec les rayons $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ et avec les centres respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cette définition peut se remplacer par la suivante. Désignons par le symbole

$$|z_i - a_i|$$

le module de l'expression imaginaire $z_i - a_i$. Alors, pour tout point du domaine δ du point a, on a la relation

$$|z_i - a_i| < \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et, réciproquement, tout point vérifiant cette relation appartient au domaine δ du point a.

(1) Autogr. Druck von H.-S. Hermann in Berlin, S. W. Beuthstrasse, 8.

Si l'un des points a_i est situé à l'infini, a_p par exemple, on remplacera dans la définition précédente l'expression $|z_p - a_p|$ par $\frac{1}{|z_p|}$.

$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ étant une fonction des variables z, on appelle *valeur de cette fonction au point a* la valeur que prend $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ lorsqu'on attribue respectivement aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est uniforme dans l'aire A, et si, en outre, pour chaque point de cette aire la fonction est continue et admet une dérivée partielle par rapport à chacune des variables z, on dit que $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est *holomorphe dans l'aire* A.

Nous considérerons, dans la suite, des séries dans les termes desquelles les variables z ne figureront qu'à des puissances entières et positives. Il importe d'indiquer dans quel ordre seront rangés les termes. Désignons par P_n le polynôme, homogène et du degré n, formé par les termes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à toutes les variables. Nous ordonnons P_n par rapport aux puissances décroissantes de z_1. Les coefficients de ce polynôme sont des polynômes homogènes en $z_2, z_3, \ldots, z_n$. Soit Q l'un d'eux. Nous ordonnons Q par rapport aux puissances décroissantes de z_2. Les coefficients des puissances de z_2 dans le polynôme Q écrit de cette façon sont des polynômes en $z_3, \ldots, z_n$. Nous ordonnons chacun d'eux suivant les puissances décroissantes de z_3, et ainsi de suite. Nous écrirons alors les termes de la série dans l'ordre suivant :

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots.$$

Pour abréger le langage, nous nommerons une telle série une *série entière en* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Une série entière sera représentée par le symbole

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n},$$

les A étant des constantes.

Théorème I. — *Étant donnée une série entière en* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *si les modules des termes sont tous finis pour les valeurs des variables qui vérifient les relations*

$$|z_i| = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la série sera convergente pour tout système de valeurs telles que l'on ait

$$|z_i| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit la série

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}.$$

Prenons des valeurs positives $r'_1, \ldots, r'_n$, telles que l'on ait

$$r'_i < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et écrivons les progressions géométriques décroissantes

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{r'_1}{r_1} + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 + \dfrac{r'_i}{r_i} + \left(\dfrac{r'_i}{r_i}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_i}{r_i}\right)^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 + \dfrac{r'_n}{r_n} + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^3 + \ldots. \end{array}\right.$$

Formons la série

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{r'_1}{r_1} + \dfrac{r'_2}{r_2} + \ldots + \dfrac{r'_n}{r_n} \\ \quad + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^2 \\ \quad + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^3 + \left(\dfrac{r'_2}{r_2}\right)^2\left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^3 \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont les termes sont rangés dans l'ordre suivant lequel on écrirait ceux d'une série entière en $\dfrac{r'_1}{r_1}, \ldots, \dfrac{r'_n}{r_n}$. Cette série est convergente. Pour le prouver, il suffit de montrer que la somme de tous les termes dont le degré par rapport aux quotients $\dfrac{r'_i}{r_i}$ ne dépasse pas le nombre entier p reste finie quand p croît indéfiniment. Désignons cette somme par Σ_p et appelons $S_p^{(1)}, \ldots, S_p^{(n)}$ les sommes analogues pour chacune des séries (1). On a

$$\Sigma_p < S_p^{(1)} S_p^{(2)} \ldots S_p^{(n)}.$$

Or les séries (1) sont convergentes. Le produit $S_p^{(1)} S_p^{(2)} \ldots S_p^{(n)}$ reste donc fini lorsque p croît indéfiniment, et par suite il en est de même pour Σ_p.

Cela posé, soit $a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ le module de $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$. Les quantités

$$a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} r_1'^{\nu_1} r_2'^{\nu_2} \ldots r_n'^{\nu_n} \quad (\nu_1, \ldots, \nu_n = 0, \ldots, \infty)$$

étant finies, si nous multiplions respectivement par chacune d'elles les termes correspondants de la série (2), nous obtiendrons une série convergente. Cette nouvelle série est précisément formée par les modules des termes de la série donnée. La série donnée est donc convergente pour tout système de valeurs des variables vérifiant les relations

$$|z_i| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarque. — La série (2), dont les termes sont positifs, reste convergente quel que soit l'ordre dans lequel on dispose ses termes. Il en résulte que, si l'on écrit dans un autre ordre les termes de la série donnée, on obtient encore une série convergente. Ayant, en effet, choisi une disposition des termes pour la série considérée, écrivons les termes de (2) de manière que les termes $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$ et $\left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{r_n'}{r_n}\right)^{\nu_n}$ occupent le même rang dans les deux séries. La nouvelle série $\sum \left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{r_n'}{r_n}\right)^{\nu_n}$ étant convergente, nous démontrerons, en raisonnant comme plus haut, que les modules des termes de la nouvelle série $\Sigma A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$ forment une suite convergente. La série considérée est donc elle-même convergente.

Il importe d'observer que, pour le point considéré, non seulement la série converge, mais aussi la série formée par les modules des termes.

Cercle de convergence. — Supposons que, pour le point a, les modules des termes d'une série entière soient tous finis. Sur le plan de chaque variable décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et passant au point correspondant a_i. Nous avons ainsi une aire A telle que pour chacun de ses points la série est absolument convergente ainsi que la série des modules. Nous nommerons une telle aire *un cercle de convergence*.

De là résulte encore une conséquence importante. Une série entière peut renfermer une infinité de termes dans lesquels la variable z_i figure

à la puissance p. Ces termes forment eux-mêmes une série convergente, puisque la série des modules est convergente. Par suite, pour tout point du cercle de convergence, une série entière peut s'écrire

$$P_0 + P_1 z_i + P_2 z_i^2 + \ldots,$$

les P désignant des séries entières par rapport aux autres variables z, séries qui admettent toutes pour cercle de convergence celui de la série donnée.

Théorème II. — *Une série entière en $z_1, \ldots, z_n$, ayant* A *pour cercle de convergence, est une fonction holomorphe des variables z dans l'aire* A.

En effet, si l'on attribue à $n-1$ des variables des valeurs choisies arbitrairement dans A, la série devient une fonction de la $n^{\text{ième}}$ variable, et l'on sait que cette fonction est holomorphe dans la portion de A correspondant à cette variable. Dès lors, il est clair que la série est holomorphe par rapport aux variables z.

Théorème III. — *$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ désignant une fonction des variables z qui est holomorphe dans une aire* A *formée de cercles ayant les diverses origines pour centres, on peut former une série entière*

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n},$$

admettant A *pour cercle de convergence et telle qu'on ait pour tout point de* A

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n} \quad (^1).$$

Théorème IV. — *Deux fonctions holomorphes dans une aire* A, *qui prennent la même valeur en chaque point d'une aire α comprise dans* A, *prennent la même valeur en chaque point de* A.

Soient les fonctions $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Posons

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) - f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

[1] Voir *Théorie des Fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2e édition, p. 166.

φ est une fonction holomorphe dans A. Soient $b_2, b_3, \dots, b_n$ des valeurs prises arbitrairement dans $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. La fonction $\varphi(z_1, b_2, \dots, b_n)$ est holomorphe dans A_1 et s'annule en tous les points de α_1 qui est comprise dans A_1. La fonction φ s'annule donc si l'on attribue à z_1 une valeur quelconque dans l'aire A_1 et à $z_2, \dots, z_n$ des valeurs prises respectivement dans $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Considérons maintenant $\varphi(c_1, z_2, b_3, \dots, b_n)$, où c_1 désigne une valeur prise arbitrairement dans A_1, $b_2, \dots, b_n$ ayant la même signification que plus haut. On a une fonction de z_2 qui est holomorphe dans A_2 et nulle pour tout point de α_2. Cette fonction est donc nulle dans A_2. C'est-à-dire que la fonction φ s'annule si l'on attribue à z_1 une valeur prise arbitrairement dans A_1, à z_2 une valeur prise arbitrairement dans A_2, à $z_3, \dots, z_n$ des valeurs arbitraires choisies dans $\alpha_3, \dots, \alpha_n$. On verra de même que, si l'on prend arbitrairement z_1, z_2, z_3 dans A_1, A_2, A_3, φ est encore nulle, et ainsi de suite. Le théorème est donc démontré.

On peut observer qu'une série entière étant holomorphe dans l'aire où elle est convergente, si deux séries prennent la même valeur en tous les points d'un domaine compris dans l'aire de convergence, elles prendront la même valeur en tout point de cette aire.

II.

Sur les séries entières qui s'annulent à l'origine.

Soit $S(z_1, z_2, \dots, z_n)$ une série entière en $z_1, z_2, \dots, z_n$, convergente dans l'aire A, et qui s'annule à l'origine. On peut former un domaine δ de l'origine dans lequel il y a un nombre infini de points pour lesquels $S = 0$. De plus, si l'on se donne arbitrairement, dans le domaine δ, les valeurs de $n - 1$ des variables z, les valeurs de la $n^{\text{ième}}$ qu'il faut leur joindre pour obtenir un zéro de la série sont fournies par une équation algébrique. Ces résultats sont la conséquence d'un théorème fondamental dû à M. Weierstrass et relatif à une forme particulière qu'on peut donner à la série S dans un domaine de l'origine.

Nous établirons d'abord un théorème préliminaire.

THÉORÈME V. — *Soit* $S(z_1, z_2, \dots, z_n)$ *une série entière en* $z_1, \dots, z_n$, *ayant* A *pour cercle de convergence et qui s'annule à l'origine. S*

$S(z_1, 0, \ldots, 0)$ *n'est pas nulle pour toute valeur de* z_1, *on peut déterminer trois nombres positifs* ρ_0, ρ_1, ρ, ρ_0 *étant inférieur à* ρ, *tels que pour tout système de valeurs des variables qui vérifie les relations*

$$\rho_0 < |z_1| < \rho, \quad |z_i| < \rho_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

on ait identiquement

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, z_3, \ldots, z_n) z_1^\nu.$$

m désigne le plus petit exposant de z_1 *dans la série entière* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$; *les nombres* ν *sont des entiers;*

$g(z_1)$ *est une série entière en* z_1 *convergente pour les valeurs telles que* $\rho_0 < |z_1| < \rho$;

enfin les $\mathcal{G}$ *sont des séries entières en* $z_2, \ldots, z_n$, *qui admettent* ρ_1 *pour cercle de convergence et s'annulent toutes à l'origine,* $\mathcal{G}_{-1}$ *étant identiquement nulle.*

La série S est absolument convergente dans A. Si on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes de z_1 on obtient une nouvelle série convergente, dans laquelle les coefficients des diverses puissances de z_1 seront eux-mêmes des séries entières convergentes par rapport à $z_2, \ldots, z_n$. Prenons dans cet ordre les termes de la série S. Représentons par $S_0(z_1)$ la série obtenue en annulant dans la précédente les variables $z_2, \ldots, z_n$, et posons

$$S_0(z_1) - S_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = S(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

S_0 est une fonction de z_1 qui est holomorphe dans A et s'annule pour $z_1 = 0$. Nous pouvons tracer de l'origine comme centre, dans l'aire A, deux cercles de rayons ρ et ρ_0 ($\rho_0 < \rho$), de manière que S_0 soit différente de o pour tous les points compris entre ces deux cercles. S_1 est aussi une fonction holomorphe des variables $z_1, \ldots, z_n$ dans le cercle de convergence. Si l'on prend $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$, S_1 s'annule quelle que soit la valeur attribuée à z_1. Dès lors, S_1 ne contient aucun terme indépendant des variables $z_2, \ldots, z_n$. Il en résulte qu'on peut prendre un nouveau nombre positif ρ_1, tel que, pour les valeurs qui satisfont aux inégalités

$$|z_i| < \rho_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

on ait

$$|S_1| < |S_0|,$$

l'aire formée par les cercles ρ_1 étant comprise dans A. Considérons un système quelconque de valeurs pour $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vérifiant les inégalités précédentes. On a

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_0 - S_1} = \frac{1}{S_0} + \frac{S_1}{S_0^2} + \ldots + \frac{S_1^{n-1}}{S_0^n} + \frac{1}{S_0 - S_1}\frac{S_1^n}{S_0^n}.$$

Comme $\left|\frac{S_1}{S_0}\right| < 1$, le dernier terme tend vers o quand n croît indéfiniment, et l'on peut écrire

$$\frac{1}{S} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}.$$

On a donc

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial z_1} - \frac{\partial S}{\partial z_1}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}$$

ou bien

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda}.$$

Mais

$$\frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda} - \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{S_1^\lambda}{S_0^\lambda},$$

et, comme les trois séries $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}}{S_0^\lambda}$, $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}$, $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^\lambda}$ sont convergentes, puisque $\left|\frac{S_1}{S_0}\right| < 1$ et puisque $S_0 \neq 0$, on peut écrire

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^\lambda,$$

et l'on a

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^\lambda.$$

forment autant de séries convergentes, et la somme de ces nouvelles séries est la valeur de la série à double entrée. z_1 figurant à la même puissance dans tous les termes d'une même colonne, on peut écrire

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu, \tag{3}$$

où les $\mathcal{G}'$ sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$, toutes convergentes dans l'aire considérée. De plus, les termes de ces séries s'annulent tous pour $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$, puisque cela arrivait pour les séries $\overline{\mathcal{G}}$ de la formule (2).

Mais l'hypothèse $S_0 = Az_1^m + Bz_1^{m+1} + \ldots$ donne

$$\frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} = m z_1^{-1} \frac{A + \frac{m+1}{m} B z_1 + \ldots}{A + B z_1 + \ldots}.$$

La fraction est une fonction holomorphe de z_1, qui se réduit à l'unité pour $z_1 = 0$. On peut la représenter par $1 + \overline{g}(z_1)$, où $\overline{g}$ désigne une série entière en z_1, sans terme constant. On peut donc écrire

$$\frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} = m z_1^{-1} + g(z_1),$$

$g(z_1)$ étant une série entière en z_1, convergente dans l'aire considérée. On a alors, à cause des formules (1), (2) et (3),

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) - \frac{\partial}{\partial z_1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu,$$

relation qu'on peut écrire

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu$$

en posant

$$-\frac{\partial}{\partial z_1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu.$$

Remarquons que le second membre ne contiendra pas de terme en z_1^{-1}, c'est-à-dire que $\mathcal{G}_{-1}$ est identiquement nulle.

On a donc la relation qu'il fallait établir.

THÉORÈME VI. — S *désignant une série entière en* $z_1, \ldots, z_n$, *admettant* A *pour cercle de convergence, nulle à l'origine, et telle que* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$ *ne soit pas nulle pour toute valeur de* z_1, *on peut fixer un nombre positif* $\delta(\delta \leq A)$ *tel qu'on ait, pour chaque point du domaine* δ *de l'origine,*

$$S = PS'.$$

S′ *désigne une série entière en* $z_1, \ldots, z_n$, *convergente dans* δ *et qui ne s'annule en aucun point de ce domaine.*

P *est un polynôme entier par rapport à la variable* z_1; *son degré est le plus faible exposant de* z_1 *dans* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$, *et ses coefficients sont des séries entières par rapport aux autres variables, séries qui convergent dans* δ *et s'annulent à l'origine.*

Posons, comme dans le théorème précédent,

$$S_0(z_1) = S(z_1, 0, \ldots, 0),$$
$$S(z_1, \ldots, z_n) = S_0(z_1) - S_1(z_1, \ldots, z_n),$$

et prenons les nombres ρ, ρ_0, ρ_1, comme il a été expliqué plus haut. Pour tout système de valeurs des variables vérifiant les inégalités

$$\rho_0 < |z_1| < \rho \quad |z_i| < \rho_1, \quad (i = 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu, \tag{1}$$

les notations conservant le même sens. Attribuons à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs arbitraires dans les limites considérées. S devient une fonction de z_1, holomorphe dans le cercle ρ. Dans ce cercle, il y a des points où S s'annule. Car, si cela n'avait pas lieu, le quotient $\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S}$ serait holomorphe et pourrait être développé en série entière en z_1; cette série devrait présenter les mêmes termes que le second membre de la formule (1); or, dans ce second membre, figure le terme $m z_1^{-1}$, et l'on sait

que ni $g(z_1)$ ni $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n)\, z_1^\nu$ ne contiennent de terme en z_1^{-1}.
Cela posé, S étant une fonction holomorphe de z_1, ses racines sont en nombre limité, et chacune est d'un degré entier et fini. Soient a_1, $a_2, \ldots, a_p$ ces racines, chacune d'elles étant répétée autant de fois que l'indique son degré. La somme

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_2} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p} \tag{2}$$

est finie pour les valeurs considérées de z_1. Ceci est évident pour les valeurs différentes des racines. Considérons la valeur a_1. On a

$$S(z_1) = (z_1 - a_1)^q \psi(z_1),$$

q étant un nombre entier positif, et ψ une fonction holomorphe de z_1, différente de o pour $z_1 = a_1$. Dès lors,

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{q}{z_1 - a_1} + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z_1}}{\psi},$$

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z_1}}{\psi} - \frac{1}{z_1 - a_r} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p},$$

$a_r, \ldots, a_p$ étant les racines différentes de a_1, et il est évident que le second membre prend une valeur finie pour $z_1 = a_1$. La somme (2) peut donc être développée en série entière en z_1, $R(z_1)$. Donnons à z_1 des valeurs telles que

$$\rho > |z_1| > |a_i| \quad (i = 1, \ldots, p)$$

et

$$|z_1| > \rho_0;$$

on aura, pour l'une quelconque de ces valeurs,

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_2} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p} = R(z_1).$$

Mais, puisque $|z_1| > |a_1|$, on peut développer $\frac{1}{z_1 - a_1}$ en série convergente

$$\frac{1}{z_1} + a_1 \frac{1}{z_1^2} + a_1^2 \frac{1}{z_1^3} + \ldots + a_1^\nu \frac{1}{z_1^{\nu+1}} + \ldots$$

et de même pour les quotients $\frac{1}{z_1 - a_2}, \ldots, \frac{1}{z_1 - a_p}$. Si l'on pose alors

$$Q_0 = p, \quad Q_\nu = (a_1)^\nu + \ldots + (a_p)^\nu,$$

on aura

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = R(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu . z_1^{-\nu-1}. \tag{3}$$

Le quotient $\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S}$ étant une fonction holomorphe de z_1 dans l'aire comprise entre les deux cercles ρ_0 et ρ, qui ont l'origine pour centre, le théorème de Laurent fait voir que les coefficients des mêmes puissances de z_1 dans les seconds membres des relations (1) et (3) doivent être égaux. Égalant les coefficients des puissances négatives de z_1, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} Q_0 = m, \\ Q_1 = \mathcal{G}_{-2}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Q_l = \mathcal{G}_{-l-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{4}$$

ce qui montre que les sommes Q peuvent se calculer au moyen des coefficients des séries $\mathcal{G}$, c'est-à-dire au moyen des coefficients de S. On peut maintenant écrire la relation (1)

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu + m z_1^{-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_{-\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{-\nu}$$

ou encore, d'après (4),

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu z_1^{\nu-1}.$$

Puisque $Q_0 = m$, on a aussi $p = m$. Posons

$$P(z_1) = (z_1 - a_1) \ldots (z_1 - a_m) = z_1^m + P_1 z_1^{m-1} + \ldots + P_m.$$

Les coefficients de P s'expriment en fonction des sommes Q au moyen des formules de Newton

$$\begin{aligned} P_1 &= -Q_1, \\ 2P_2 &= -Q_2 - Q_1 P_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ mP_m &= -Q_m - \ldots - Q_1 P_{m-1}. \end{aligned}$$

On voit donc, en considérant les formules (4), que les coefficients $P_1, \ldots, P_m$ sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$, convergentes dans le domaine ρ_1 et qui s'annulent toutes à l'origine.

La série $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu$ peut être considérée comme la dérivée par rapport à z_1 d'une autre série entière

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu+1},$$

et de même pour $g(z_1)$. Posons

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^{z_1} g(z_1) dz_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu+1},$$

$$S''(z_1, \ldots, z_n) = e^{F(z_1, \ldots, z_n)}.$$

S'' est holomorphe dans le domaine de l'origine formé par les cercles ρ et ρ_1, et ne s'annule pas dans ce domaine. On peut donc considérer S'' comme une série entière différente de o pour tout point de ce domaine. Si maintenant on observe qu'on a

$$g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu = \frac{\frac{\partial S''}{\partial z_1}}{S''}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu z_1^{-\nu-1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z_1}}{P},$$

on trouve

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z_1}}{P} + \frac{\frac{\partial S''}{\partial z_1}}{S''},$$

d'où

$$S = PS''C,$$

C étant une fonction de $z_2, \ldots, z_n$ indépendante de z_1. Cette fonction est holomorphe dans le domaine ρ_1; pour l'origine, elle se réduit au coefficient de z_1^m dans $S_0(z_1)$. Si, en effet, on fait $z_2 = \ldots = z_n = 0$, S devient $S_0(z_1)$, P devient z_1^m et S″ devient $e^{F(z_1, 0, \ldots, 0)}$. Or

$$F(z_1, 0, \ldots, 0) = \int_0^{z_1} g(z_1)\, dz_1,$$

c'est-à-dire que $F(z_1, 0, \ldots, 0)$ est une série entière sans terme constant. Il en résulte que $e^{F(z_1, 0, \ldots, 0)}$ est une série entière ayant l'unité pour terme constant. En représentant cette série par $1 + az_1 + \ldots$, on aura, en annulant toutes les variables sauf z_1,

$$S_0(z_1) = [C]_0 z_1^m (1 + a z_1 + \ldots),$$

ce qui montre bien que $[C]_0$ est le coefficient de z_1^m dans $S_0(z_1)$. La fonction C peut s'annuler pour les valeurs considérées des variables. Mais $z_2, \ldots, z_n$ sont assujetties à la seule condition d'avoir leurs modules inférieurs à ρ_1. On peut imaginer un nombre positif ρ_2 inférieur à ρ_1 et assez petit pour que C, qui est différent de o à l'origine, ne s'annule pas dans le domaine ρ_2 de l'origine. Alors, dans ce domaine, le produit CS″ est une série entière qui ne s'annule pas. En représentant cette série par S′, on aura finalement la relation

$$S = PS', \tag{5}$$

où P et S′ ont les significations indiquées dans l'énoncé.

Cette relation n'est établie que pour les valeurs des variables qui sont situées dans une aire déterminée. Cette aire est comprise dans le domaine de l'origine formée par des cercles ayant un rayon δ égal au plus petit des deux nombres ρ et ρ_2. Les trois séries S, P, S′ sont convergentes dans ce domaine. Par suite, la relation (4) subsiste, d'après le théorème IV, pour tout point de δ, et le théorème est démontré.

Le théorème précédent permet d'étudier les zéros de la fonction $S(z_1, \ldots, z_n)$ qui sont situés dans un certain domaine de l'origine.

Supposons, pour prendre d'abord un cas simple, que $S_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ ne soit pas nulle pour toute valeur de z_1. Nous pouvons fixer un domaine δ de l'origine dans lequel on a $S = PS'$, les notations ayant

le même sens que plus haut. Proposons-nous d'étudier les zéros de la fonction S dans le domaine δ. Donnons à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs arbitraires, situées dans δ, et cherchons les valeurs de z qu'il faut leur joindre pour obtenir des zéros de S. P est un polynôme, de degré m par exemple, et S′ une série entière en z_1. Pour les valeurs considérées de $z_2, \ldots, z_n$, les coefficients de P et de S′ prennent des valeurs déterminées, et nous pouvons faire abstraction de la complication des calculs qui donneraient ces valeurs. On est amené à chercher les valeurs de z_1, situées dans δ, qui annulent le produit PS′. Or S′ ne s'annule pas dans δ. Donc il y a m valeurs de z_1, situées dans δ, qui annulent S, et pas davantage. On voit que ces valeurs sont données par l'équation algébrique $P = 0$. Il y a donc, dans le domaine δ, une infinité de points pour lesquels S s'annule. Autrement dit, il est impossible de fixer un domaine de l'origine dans lequel la fonction S n'ait qu'un nombre limité de zéros.

Imaginons que les points qui figurent les variables $z_2, \ldots, z_n$ sur leurs plans respectifs se déplacent en partant de l'origine et voyons comment se comporteront sur le plan des z_1 les différents points tels que chacun d'eux réuni avec les précédents forme un zéro de la fonction. Traçons sur les plans respectifs des variables $z_2, \ldots, z_n$ des courbes arbitraires partant de l'origine, et supposons que les affixes des variables se déplacent d'un mouvement continu sur les courbes correspondantes. Les coefficients de P sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$ qui s'annulent toutes à l'origine. Chacune de ces séries est une fonction holomorphe de $z_2, \ldots, z_n$ dans le domaine δ. Par suite, si, comme on le suppose, chacune des variables $z_2, \ldots, z_n$ varie d'une manière continue, il en sera de même des coefficients de P et des m racines de l'équation algébrique en z_1. Les points qui représentent ces racines se déplacent donc d'un mouvement continu sur une courbe déterminée.

Nous pouvons représenter analytiquement ces résultats. Posons

$$\begin{aligned} z_h &= x_h + y_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \\ x_h &= \varphi_h(t) \quad\quad (h = 2, \ldots, n), \\ y_h &= \psi_h(t) \quad\quad (h = 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

t étant une variable réelle, les φ et les ψ des fonctions continues de t. Lorsque t variera, chaque point z_h $(h = 2, \ldots, n)$ se déplacera sur une

courbe, déterminée par les équations $x_h = \varphi_h(t)$, $y_h = \psi_h(t)$. Si t varie d'une manière continue, chaque point se déplace sur la courbe correspondante d'un mouvement continu. Dans l'équation

$$z_1^m + P_1 z_1^{m-1} + \ldots + P_m = 0,$$

substituons aux variables z les variables x, y, puis égalons à o le coefficient de i et le terme indépendant de i. Nous aurons deux équations

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad f_1(x_1, y_1) = 0.$$

Enfin faisons la substitution

$$x_h = \varphi_h(t), \quad y_h = \psi_h(t) \quad (h = 2, \ldots, n),$$

nous aurons

$$\varphi_1(x_1, y_1, t) = 0, \quad \psi_1(x_1, y_1, t) = 0.$$

Ces équations font connaître z_1 en fonction de t. De plus, elles déterminent la courbe sur laquelle se déplace le point z_1, d'un mouvement continu, quand t varie d'une manière continue.

Si $S(z_1, 0, \ldots, 0)$ s'annule pour toute valeur de z_1, on cherchera à recommencer le raisonnement avec une autre des variables. Dans le cas où chaque terme de la série contient toutes les variables z, le raisonnement est en défaut. Nous procéderons alors de la manière suivante.

Représentons par $(z_1, z_2, \ldots, z_n)_\lambda$ l'ensemble des termes de S qui sont du degré λ par rapport à toutes les variables, et soit μ la plus petite valeur de λ pour laquelle les coefficients $(z_1, \ldots, z_n)_\lambda$ ne sont pas tous nuls; on aura

$$S(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n)_\mu + (z_1, \ldots, z_n)_{\mu+1} + \ldots.$$

Faisons la substitution

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = C_1^1 t_1 + C_1^2 t_2 + \ldots + C_1^n t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = C_n^1 t_1 + C_n^2 t_2 + \ldots + C_n^n t_n, \end{array} \right.$$

les C désignant des constantes choisies arbitrairement, mais telles que

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^2 & \ldots & C_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad (C_1^1, \ldots, C_n^1)_\mu \neq 0.$$

Par cette substitution, S devient une série entière par rapport aux t. Représentons-la par $\Sigma(t_1, \ldots, t_n)$. On a

$$\Sigma(t_1, 0, \ldots, 0) = (C_1^1, C_2^1, \ldots, C_n^1)_\mu t_1^\mu + \ldots.$$

D'après ce qui précède, on a, dans un domaine δ', relatif aux variables t,

$$\Sigma(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^\mu + Q_1 t_1^{\mu-1} + \ldots + Q_\mu)\,\Sigma'(t_1, \ldots, t_n),$$

où les Q sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui s'annulent toutes pour $t_2 = \ldots = t_n = 0$, et où Σ' est une série entière différente de o dans δ'. Au domaine δ' relatif aux t correspond un domaine δ pour les z. Alors, pour avoir les valeurs des variables z situées dans δ et qui annulent S, on prendra arbitrairement $t_2, \ldots, t_n$ dans δ', on calculera μ valeurs de t_1 par l'équation algébrique

$$t_1^\mu + Q_1 t_1^{\mu-1} + \ldots + Q_\mu = 0, \tag{2}$$

et l'on aura ensuite les z par les relations (1).

On voit, comme plus haut, que si les points $z_2, \ldots, z_n$ se déplacent d'un mouvement continu sur des courbes partant de l'origine, le point z_1, qu'il faut joindre à un système de valeurs de $z_2, \ldots, z_n$ pour avoir un zéro de S, décrit d'un mouvement continu une trajectoire déterminée. On peut déterminer analytiquement les trajectoires par un calcul analogue au précédent. Posons

$$\left.\begin{aligned} z_h &= x_h + iy_h \\ t_h &= \xi_h + i\eta_h \end{aligned}\right\} (h = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_h &= \varphi_h(u) \\ \eta_h &= \psi_h(u) \end{aligned}\right\} (h = 2, \ldots, n),$$

les φ et ψ étant des fonctions continues de la variable réelle u. Dans les équations (1) et (2), faisons les substitutions

$$z_h = x_h + iy_h, \quad t_h = \xi_h + i\eta_h,$$

puis égalons à o les coefficients de i et les termes indépendants. Nous aurons $2(n+1)$ équations

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} f_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \\ g_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \end{aligned}\right\} (h = 1, \ldots, n), \\ F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0, \\ G(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les équations suivantes déterminent la trajectoire du point z_h :

$$f_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$g_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$G(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$

$$\xi_2 = \varphi_2(u),$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\xi_n = \varphi_n(u),$$
$$\eta_2 = \psi_2(u),$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\eta_n = \psi_n(u).$$

Nous ferons une autre remarque au sujet du théorème précédent. Soit S une série entière n'ayant pas de terme constant. On peut déterminer un domaine δ de l'origine, tel que, si l'on choisit un système de valeurs pour $z_2, \ldots, z_n$ dans ce domaine, les valeurs de z_1, situées dans δ et satisfaisant à l'équation $S = 0$, sont données par des équations algébriques. On voit ainsi que l'équation $S = 0$ définit, dans le domaine δ, une fonction implicite z_1 des variables $z_2, \ldots, z_n$ qui possède les mêmes propriétés que la fonction implicite définie par une équation algébrique.

Soient S_0 et S_1 deux séries entières s'annulant à l'origine et admettant A pour cercle de convergence. Proposons-nous de rechercher s'il y a, dans un domaine de l'origine, d'autres points pour lesquels les deux séries s'annulent. Faisons la substitution

$$z_1 = C_1^1 t_1 + \ldots + C_1^n t_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_n = C_n^1 t_1 + \ldots + C_n^n t_n.$$

S_0 et S_1 deviennent des séries entières par rapport aux variables t, Σ_0 et Σ_1. Choisissons les constantes telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & \ldots & C_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^1 & \ldots & C_n^n \end{vmatrix}$$

soit différent de o, et telles aussi que ni $\Sigma_0(t_1, o, \ldots, o)$ ni $\Sigma_1(t_1, o, \ldots, o)$ ne soient nulles pour toutes les valeurs de t_1. Cela posé, on peut fixer un domaine δ' de l'origine dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1,$$

P_0, P_1 étant deux polynômes en t_1; Σ'_0, Σ'_1 étant des séries entières par rapport aux t qui ne s'annulent en aucun point de δ'. Si Σ_0 et Σ_1 s'annulent, P_0 et P_1 s'annulent aussi, et réciproquement. Soit R le résultant des polynômes P_0, P_1. Ce résultant est une fonction entière et homogène des coefficients de P_0 et P_1, c'est-à-dire une série entière en $t_2, \ldots, t_n$, série qui s'annule à l'origine. La série R admet une infinité de zéros dans un domaine δ'' de l'origine, et l'on peut prendre $\delta'' < \delta'$. A chaque zéro de R correspond au moins un zéro commun à S_0 et S_1. En effet, si l'on prend un zéro de R, les polynômes P_0 et P_1 admettent au moins une racine commune située dans δ', et si l'on prend pour t_1 une racine commune, on a un zéro de Σ_0 et de Σ_1, c'est-à-dire de S_0 et de S_1. Si maintenant on appelle δ le domaine relatif aux variables z qui correspond au domaine δ'', on voit que les deux séries admettent une infinité de zéros communs dans le domaine δ. On pourrait les déterminer de la manière suivante. On aurait d'abord un zéro de R d'après la méthode déjà indiquée, en prenant arbitrairement $n - 2$ variables et calculant la $(n-1)^{\text{ième}}$ par une équation algébrique. Cela fait, on chercherait la racine commune aux deux équations algébriques $P_0 = o$, $P_1 = o$, et l'on aurait la $n^{\text{ième}}$ variable. Les valeurs des z se déduisent sans peine de celles des t.

Dans le cas particulier où les séries données sont à deux variables, R n'en contient plus qu'une, et alors les résultats changent. R étant une fonction holomorphe, nulle pour l'origine, on peut fixer un domaine δ dans lequel R n'aura pas d'autres zéros que l'origine, et l'on peut prendre $\delta \leq \delta'$. Alors S_0 et S_1 n'ont pas, dans le domaine δ, d'autres zéros communs que l'origine. Ainsi, si deux séries à deux variables ont un zéro commun, il est possible de fixer un domaine de ce point dans lequel il n'y a pas d'autres zéros communs.

III.

Divisibilité des séries entières.

Conditions de divisibilité de deux séries entières.

Soient S_0, S_1 deux séries entières par rapport aux variables indépendantes $z_1, \ldots, z_n$, et supposons que ces deux séries admettent A pour cercle de convergence. Nous dirons, en adoptant une locution de M. Weierstrass, que la série S_0 est *divisible* par la série S_1, si l'on peut fixer un domaine δ de l'origine dans lequel on ait

$$S_0 = S_1 S_2,$$

S_2 désignant une série entière convergente dans δ.

Si S_1 ne s'annule pas à l'origine, on peut fixer un domaine δ ($\delta \leqq A$) de ce point dans lequel la série n'a pas de zéros. Alors la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ est holomorphe dans δ, et l'on peut la mettre sous la forme d'une série entière convergente dans δ. Il en résulte que S_0 est divisible par S_1. Au contraire, si S_1 s'annule à l'origine, tandis que S_0 prend en ce point une valeur différente de o, le quotient $\frac{S_0}{S_1}$ étant infini à l'origine, il est impossible de le représenter dans un domaine de ce point par une série entière convergente. Il n'y a donc lieu de rechercher les conditions de divisibilité de deux séries que dans l'hypothèse où elles s'annulent toutes les deux à l'origine.

Si l'on sait reconnaitre que le module du quotient $\frac{S_0}{S_1}$ reste fini dans un domaine δ de l'origine, on en conclut que ce quotient est holomorphe dans δ et peut être développé en série entière. S_0 est donc divisible par S_1.

Considérons maintenant le cas général. Soient $S_0(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $S_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ deux séries entières qui s'annulent à l'origine. Faisons la substitution

$$z_i = C_i^1 t_1 + \ldots + C_i^n t_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

les C désignant des constantes assujetties seulement aux deux condi-

tions suivantes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & \dots & C_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 & \dots & C_n^n \end{vmatrix}$$

est différent de o, et aucune des deux séries

$$S_0(C_1^1 t_1, C_2^1 t_1, \dots, C_n^1 t_1), \quad S_1(C_1^1 t_1, C_2^1 t_1 \dots, C_n^1 t_1)$$

ne s'annule pour toutes les valeurs de t_1. Représentons par Σ_0 et Σ_1 les séries entières par rapport aux variables t que l'on obtient par la substitution indiquée. Soient μ et ν les plus faibles exposants de t_1 dans $\Sigma_0(t_1, 0, \dots, 0)$ et $\Sigma_1(t_1, 0, \dots, 0)$. On sait que l'on peut déterminer un domaine δ de l'origine dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma_0', \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma_1',$$

Σ_0, Σ_1' désignant des séries qui ne s'annulent en aucun point de δ; P_0, P_1 désignant des polynômes entiers en t_1. Soit

$$P_0 = t_1^\mu + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \dots + P_0^{(\mu)},$$
$$P_1 = t_1^\nu + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \dots + P_1^{(\nu)},$$

les P_0 et P_1 étant des séries entières en $t_2, \dots, t_n$, dépourvues de termes constants.

Les conditions de divisibilité des séries sont alors données par le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Si l'on effectue la division du polynôme* P_0 *par le polynôme* P_1, *on obtient pour reste un polynôme en* t_1 *dont les coefficients sont des séries entières en* $t_2, \dots, t_n$. *Pour que* S_0 *soit divisible par* S_1, *il faut et il suffit que ces nouvelles séries aient tous leurs coefficients nuls.*

En d'autres termes, *pour que* S_0 *soit divisible par* S_1, *il faut et il suffit que le polynôme* P_0 *soit divisible, au sens ordinaire du mot, par le polynôme* P_1, *quelles que soient les valeurs attribuées à* $t_2, \dots, t_n$.

En effet, pour que S_0 soit divisible par S_1, il faut et il suffit que Σ_0 soit divisible par Σ_1, c'est-à-dire que le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ reste

fini dans un certain domaine Δ de l'origine, ce domaine étant relatif aux variables t.

Je dis d'abord que les conditions sont nécessaires. Nous pouvons prendre δ aussi petit que nous voulons, et par suite inférieur à Δ. Le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ doit donc rester fini pour tout point de δ. Les racines des polynômes P_0, P_1 se réduisent à zéro pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$ et sont, dans le domaine δ, des fonctions continues des variables $t_2, \ldots, t_n$. On peut donc déterminer un nombre positif $\delta_1 \leqq \delta$ tel que, pour tout système de valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ vérifiant l'inégalité

$$|t_i| < \delta_1 \quad (i = 2, \ldots, n),$$

le module de chaque racine des polynômes P_0 et P_1 soit inférieur à δ. Prenons alors un point $t'_2, \ldots, t'_n$ dans δ_1, et appelons $t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}$ les racines distinctes des polynômes P_0 et P_1 qui correspondent à ce point. On a, pour ce point,

$$\frac{P_0}{P_1} = (t_1 - t_1^{(1)})^{\lambda_1} \ldots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m},$$

les λ étant des nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls. De là

$$\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1} = (t_1 - t_1^{(1)})^{\lambda_1} \ldots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m} \frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}.$$

Le quotient $\frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}$ étant différent de 0, dans δ, on voit que, si un seul des λ est négatif, λ_i par exemple, le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ est infini pour le point $(t_1 = t_1^{(i)}, t_2 = t'_2, \ldots, t_{n_1} = t'_n)$ pris dans Δ. Il faut donc que tous les λ soient positifs, ou nuls; c'est-à-dire que, pour les valeurs considérées $t'_2, \ldots, t'_n$, P_0 est divisible par P_1. On a posé

$$P_0 = t_1^{\mu} + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \ldots + P_0^{(\mu)},$$
$$P_1 = t_1^{\nu} + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_1^{(\nu)}.$$

Soient le quotient des deux polynômes

$$t_1^{\mu-\nu} + P_2^{(1)} t_1^{\mu-\nu-1} + \ldots + P_2^{(\mu-\ )}$$

et le reste

$$P_3^{(0)}t_1^{\nu-1}+P_3^{(1)}t_1^{\nu-2}+\ldots+P_3^{(\nu-1)}.$$

On aura identiquement

$$\begin{aligned}
&t_1^{\mu}+P_0^{(1)}t_1^{\mu-1}+\ldots+P_0^{(\mu)}\\
&=(t_1^{\nu}+P_1^{(1)}t_1^{\nu-1}+\ldots+P_1^{(\nu)})(t_1^{\mu-\nu}+P_2^{(1)}t_1^{\mu-\nu-1}+\ldots+P_2^{(\mu-\nu)})\\
&\quad+P_3^{(0)}t_1^{\nu-1}+\ldots+P_3^{(\nu-1)}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
P_0^{(1)}&=P_2^{(1)}+P_1^{(1)},\\
P_0^{(2)}&=P_2^{(2)}+P_1^{(1)}P_2^{(1)}+P_1^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_0^{(\nu)}&=P_2^{(\mu-\nu)}+\ldots+P_1^{(\mu-\nu)},\\
P_0^{(\mu)}&=P_1^{(\nu)}P_2^{(\mu-\nu)}+\ldots+P_3^{(\nu-1)}.
\end{aligned}$$

Ces relations montrent que les coefficients P_2 et P_3 sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$, convergentes dans δ. On a vu que, pour les valeurs considérées de $t_2, \ldots, t_n$, P_0 était divisible par P_1. On a donc, pour ces valeurs,

$$P_3^{(0)}=0,\quad P_3^{(1)}=0,\quad P_3^{(\nu-1)}=0.$$

Mais le même raisonnement peut se faire avec un autre système de valeurs de $t_2, \ldots, t_n$, choisi arbitrairement dans δ_1. Les séries P_3 prennent donc la valeur o pour tout point de l'aire δ_1 et, par suite, les coefficients des termes de chacune de ces séries sont nuls. Ce sont les conditions indiquées.

On voit qu'on peut énoncer ce résultat en disant que le polynôme P_0 est divisible par P_1, c'est-à-dire qu'on a pour tout point de δ

$$P_0=P_1P_2,$$

P_2 étant un polynôme en t_1, dont les coefficients ont été calculés plus haut.

Je dis maintenant que les conditions sont suffisantes. Nous avons formé les polynômes P_0 et P_1, et reconnu qu'on avait pour tout point de δ

$$P_3^{(0)}=0,\quad P_3^{(1)}=1,\quad \ldots,\quad P_3^{(\nu-1)}=0,$$

c'est-à-dire

$$P_0=P_1P_2.$$

On a identiquement dans δ

$$\Sigma_0(t_1, \ldots, t_n) = P_0 \Sigma'_0 = P_1 P_2 \Sigma'_0 = \Sigma_1 \frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1} P_2.$$

Mais le quotient $\frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}$ est holomorphe dans δ, de même que P_2. Leur produit est aussi holomorphe, et on peut le mettre sous forme de série entière, Σ_2, convergente dans δ. On a alors

$$\Sigma_0(t_1, \ldots, t_n) = \Sigma_1(t_1, \ldots, t_n)\, \Sigma_2(t_1, \ldots, t_n),$$

ce qui démontre le théorème.

De ce théorème, on déduit qu'une série entière S_0, nulle pour l'origine, est divisible par une infinité de séries s'annulant à l'origine. Par un changement de variables, mettons, comme plus haut, la série Σ_0 sous la forme $P_0 \Sigma'_0$, les notations ayant toujours le même sens. Prenons un diviseur quelconque P_1 du polynôme P_0, et désignons par Σ'_1 une série entière quelconque qui ne soit pas nulle à l'origine. On peut fixer un domaine δ dans lequel Σ'_1 ne sera pas nulle et dans lequel on aura $\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0$. La fonction $P_1 \Sigma'_1$ étant holomorphe dans δ, on peut la développer en série entière Σ_1. Cette série Σ_1 divise Σ_0. Si maintenant on revient aux variables z, on obtiendra une série S_1 divisant S_0. Le facteur Σ'_1 étant arbitraire, la série S_0 admet une infinité de diviseurs.

Diviseurs communs à deux séries.

Soient $S_0(z_1, \ldots, z_n)$, $S_1(z_1, \ldots, z_n)$ deux séries entières qui s'annulent à l'origine. Proposons-nous de rechercher s'il y a des séries entières s'annulant à l'origine, qui divisent à la fois S_0 et S_1. Si nous trouvons des séries répondant à la question, nous les appellerons des *diviseurs communs* aux deux séries données.

Soit S_2 une série entière divisant S_0 et S_1, S_2 s'annulant à l'origine. Aux variables z, substituons de nouvelles variables t, comme précédemment, et conservons les mêmes notations. On peut fixer un domaine δ de l'origine, dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1, \quad \Sigma_2 = P_2 \Sigma'_2.$$

D'après le théorème précédent, pour que S_2 divise S_0 et S_1, il faut que le polynôme P_2 divise P_0 et P_1. Désignons par λ et μ les degrés par

rapport à t_1 des polynômes P_0 et P_1, et supposons, pour fixer les idées, $\lambda \geqq \mu$. Effectuons les divisions successives qui donnent le plus grand commun diviseur des polynômes. Le reste de la division de P_0 par P_1 sera un polynôme de degré $\mu - 1$ au plus. Si ce reste est effectivement de degré $\mu - 1$, représentons-le par

$$R_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + R_{\mu-1}^{(1)} t_1^{\mu-2} + \ldots + R_{\mu-1}^{(\mu-1)}.$$

Les coefficients sont des polynômes entiers par rapport aux coefficients de P_0 et P_1, c'est-à-dire des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui admettent δ pour cercle de convergence et se réduisent toutes à o pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$. Divisons maintenant P_1 par ce reste, et faisons les divisions de manière que les coefficients du nouveau reste soient aussi des polynômes par rapport aux coefficients du dividende et du diviseur, c'est-à-dire des séries entières. Nous aurons un reste que nous représenterons par

$$R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + R_{\mu-2}^{(1)} t_1^{\mu-3} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)}.$$

Si le reste de la première division avait été de degré $\mu - 2$, le calcul indiqué n'aurait pu se faire. Dans ce cas, nous représenterons le reste de degré $\mu - 1$ par la même formule que précédemment, en convenant que les $R_{\mu-1}$ désignent des séries dont tous les coefficients sont nuls, et alors le reste donné par la première division sera représenté par

$$R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + R_{\mu-2}^{(1)} t_1^{\mu-3} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)},$$

la série $R_{\mu-2}$ n'ayant pas tous ses coefficients nuls. En continuant de la même manière, nous pouvons dire que la série des divisions donne une suite de restes qui sont des polynômes en t_1 de degrés respectivement égaux à $\mu - 1$, $\mu - 2$, ..., 1, 0, dont les coefficients sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui admettent toutes δ pour cercle de convergence, et se réduisent toutes à zéro pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$. Représentons ces restes par les formules

$$\begin{array}{l}
R_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \ldots + R_{\mu-1}^{(\mu-1)}, \\
R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
R_{\nu} t_1^{\nu} + \ldots + R_{\nu}^{(\nu)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
R_1 t_1 + R_1^{(1)}, \\
R.
\end{array}$$

D'après nos conventions, si R_ν a tous ses coefficients nuls, il en est de même pour $R_\nu^{(1)}, \ldots, R_\nu^{(\nu)}$. Cela posé, les polynômes P_0 et P_1 admettant un diviseur commun, on verra, comme précédemment, que la série R a tous ses coefficients nuls.

On obtient ainsi, en fonction des coefficients des séries données S_0, S_1, des conditions nécessaires pour que ces séries admettent des diviseurs communs qui s'annulent à l'origine.

Réciproquement, si la série R a tous ses coefficients nuls, je dis que les deux séries données admettent des diviseurs communs. Supposons, en effet, que chacune des séries R, R_1, $R_1^{(1)}$, ... ait tous ses coefficients nuls, la série R_ν étant la première de la suite qui n'a pas tous ses coefficients nuls. Prenons dans le domaine δ un point $t'_2, \ldots, t'_n$, pour lequel la série R_ν ne soit pas nulle. Pour ces valeurs des variables $t_2, \ldots, t_n$, les polynômes P_0 et P_1 admettent un plus grand commun diviseur

$$R_\nu t_1^\nu + R_\nu^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + R_\nu^{(\nu)}.$$

On peut fixer un domaine ω du point $t'_2, \ldots, t'_n$, qui soit compris dans δ, et dans lequel R_ν soit différent de o. Pour chaque point de ce domaine P_0 et P_1 admettent le polynôme précédent pour plus grand commun diviseur. Ce plus grand commun diviseur peut s'écrire

$$t_1^\nu + \frac{R_\nu^{(1)}}{R_\nu} t_1^{\nu-1} + \ldots + \frac{R_\nu^{(\nu)}}{R_\nu}.$$

Les quotients $\frac{R_\nu^{(1)}}{R_\nu}, \ldots, \frac{R_\nu^{(\nu)}}{R_\nu}$ peuvent être développés, dans le domaine ω, en séries entières par rapport aux différences $(t_2 - t'_2), \ldots, (t_n - t'_n)$, soient $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$. Mais on peut considérer $T_1, \ldots, T_\nu$ comme des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ convergentes dans δ. Si nous posons

$$P_2 = t_1^\nu + T_1 t_1^{\nu-1} + \ldots + T_\nu,$$

on voit qu'on aura pour tout point de ω et, par suite, de δ (théorème IV),

$$P_0 = P_2 P_3, \quad P_1 = P_2 P_4,$$

P_3 et P_4 désignant des polynômes en t_1 dont les coefficients sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$. Il en résulte que Σ_0 et Σ_1 admettent un diviseur commun P_2. Par suite, S_0 et S_1 admettent aussi un diviseur

commun S_2, qu'on obtient en remplaçant dans P_2 les variables t par leurs valeurs en fonction des variables z.

On peut, dès lors, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Étant données deux séries entières en $z_1, \ldots, z_n$ qui s'annulent à l'origine, si l'on fait un changement de variables comme il a été indiqué, et si ensuite on calcule le résultant des polynômes P_0 et P_1 (nous conservons toujours les mêmes notations), les conditions nécessaires et suffisantes pour que S_0 et S_1 admettent des diviseurs communs sont que la série résultante ait tous ses coefficients nuls.*

Plus grand commun diviseur de deux séries.

Soient deux séries S_0, S_1 qui sont nulles à l'origine. Reprenons les notations précédentes. Aux variables z substituons les variables t. Nous obtenons les séries Σ_0, Σ_1. Soit δ un domaine de l'origine dans lequel on a $\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0$, $\Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1$. Supposons que P_0 et P_1 admettent un plus grand commun diviseur de degré ν, P_2. On a pour tout point de δ

$$P_0 = P_2 P_3, \quad P_1 = P_2 P_4,$$
$$\Sigma_0 = P_2 \Sigma_3, \quad \Sigma_1 = P_2 \Sigma_4,$$

en posant

$$\Sigma_3 = P_3 \Sigma'_0, \quad \Sigma_4 = P_4 \Sigma'_1.$$

Soient enfin S_3, S_4 les séries que donnent Σ_3, Σ_4, quand on revient aux variables z.

THÉORÈME IX. — *Les séries S_3, S_4 n'admettent pas de diviseur commun nul à l'origine.*

Nous allons montrer, en effet, que, si S_3 et S_4 admettaient un diviseur commun, nul à l'origine, les polynômes en t_1, P_3 et P_4 auraient un diviseur commun; or cela est impossible, puisque ces polynômes sont les quotients obtenus en divisant P_0 et P_1 par leur plus grand commun diviseur. Si S_3 et S_4 admettent un diviseur commun nul à l'origine, on peut prendre un système de valeurs pour $t_2, \ldots, t_n$ (dans le domaine où ces variables doivent rester), tel que les valeurs de t_1, qui forment avec les précédentes un zéro du diviseur, soient aussi dans le domaine δ. Mais alors ce point est aussi un zéro de Σ_3 et de Σ_4.

Or Σ'_0 ne s'annule pas dans le domaine δ. Donc les valeurs considérées annulent P_3. Σ'_1 ne s'annule pas non plus. Donc ces mêmes valeurs annulent P_4. Il en résulterait que P_3 et P_4 admettraient des racines communes.

Théorème X. — *Toute série, nulle à l'origine, qui divise* S_0 *et* S_1, *divise aussi* S_2.

Soit Q une série qui divise S_0 et S_1. Prenons un domaine δ de l'origine, dans lequel on ait

$$\Sigma_0 = P_0\Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1\Sigma'_1,$$
$$Q = HQ' \quad \Sigma_2 = P_2\Sigma'_2,$$

P_0, P_1, P_2, H désignant toujours des polynômes en t_1 et $\Sigma'_0, \Sigma'_1, \Sigma'_2$, Q' des séries différentes de o dans δ. Donnons à $t_2, \ldots, t_n$ des valeurs comprises dans $\delta'(\delta' < \delta)$ et telles que les valeurs correspondantes de t_1, qui annulent H, soient comprises dans δ. Chaque racine de H associée à ces valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ forme un zéro de Q et, par suite, un zéro de S_0 et de S_1. Donc, en raisonnant comme plus haut, on voit que P_0 et P_1 sont tous les deux divisibles par H. Par suite, H divise le plus grand commun diviseur P_2 de P_0 et P_1. Soit $P_2 = HK$, K étant un polynôme en t_1. On aura, dans le domaine δ',

$$P_2 = Q\frac{K}{Q'} = QQ_1,$$

Q_1 désignant une série entière convergente dans δ'. Alors

$$\Sigma_2 = QQ_1\Sigma'_2 = QQ_2,$$

où Q_2 est toujours une série entière convergente dans δ', et le théorème est démontré.

De ce qui précède résulte que la série S_2 joue, par rapport aux séries S_0 et S_1, le même rôle que le plus grand commun diviseur par rapport à deux polynômes. Tout diviseur commun de deux polynômes est un diviseur de leur plus grand commun diviseur; de même toute série qui divise S_0 et S_1 divise S_2. Les quotients obtenus en divisant deux polynômes par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux; de même les séries S_3 et S_4, qui, respectivement multipliées par S_2, reproduisent S_0 et S_1, n'admettent aucun diviseur-série commun.

Nous appellerons cette série S_2 *le plus grand commun diviseur des séries* S_0 *et* S_1.

Théorème XI. — S_0, S_1, S_2 *étant trois séries entières par rapport aux variables* $z_1, \ldots, z_n$, *admettant* A *pour cercle de convergence et s'annulant à l'origine, si la série* S_0 *est divisible par* S_1 *et par* S_2, *les séries* S_1 *et* S_2 *n'admettant pas de plus grand commun diviseur, la série* S_0 *est divisible par le produit* $S_1 S_2$.

Aux variables z substituons les variables t, de la manière souvent indiquée, et conservons toujours les mêmes notations. Fixons un domaine $\delta(\delta \leqq A)$ dans lequel on ait

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1, \quad \Sigma_2 = P_2 \Sigma'_2.$$

Par hypothèse, le résultant des polynômes P_0 et P_1 est nul en tout point de δ, et de même pour celui de P_0 et P_2. Au contraire, le résultant de P_1 et de P_2 n'est pas nul pour tous les points de δ. Prenons un point $t'_2, \ldots, t'_n$ et un domaine ω de ce point tous deux compris dans δ, pour lesquels ce dernier résultant soit différent de o. Appelons ω' l'aire formée par les valeurs de t_1 situées dans δ et de $t_2, \ldots, t_n$ situées dans ω. On a alors dans ω'

$$P_0 = P_1 P_3, \quad P_0 = P_2 P_4,$$

et, comme P_1, P_2 sont premiers entre eux,

$$P_0 = P_1 P_2 P_5.$$

P_5 est une série entière en $t_2, \ldots, t_n$ qui admet δ pour cercle de convergence. Alors la relation précédente, établie pour ω' seulement, subsiste pour le domaine δ tout entier (théorème IV). De cette relation on déduit

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \Sigma_2 \frac{P_5}{\Sigma'_1 \Sigma'_2},$$

et, comme le produit $\Sigma'_1 \Sigma'_2$ ne s'annule pas dans δ, on peut remplacer le quotient $\frac{P_5}{\Sigma'_1 \Sigma'_2}$ par une série entière en $t_1, \ldots, t_n$, Σ_3. On a donc

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3,$$

et, en revenant aux variables z,

$$S_0 = S_1 S_2 S_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME XII. — *S_0, S_1, S_2 étant trois séries entières par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$ qui admettent A pour cercle de convergence et s'annulent à l'origine, si la série S_0 est divisible par S_1 et par S_2, ces deux dernières admettant un plus grand commun diviseur S_3, on peut fixer un domaine δ de l'origine dans lequel on ait*

$$S_0 = \frac{S_1 S_2}{S_3} S_4,$$

S_4 étant une série entière convergente dans δ.

On sait, en effet, qu'on peut fixer un domaine δ' de l'origine dans lequel on a

$$S_0 = S_1 Q, \quad S_1 = S_3 Q_1, \quad S_2 = S_3 Q_2,$$

les Q désignant des séries entières. On a donc

$$S_0 = S_3 Q_1 Q.$$

Ainsi la série S_0 est divisible par S_3 et le quotient est lui-même divisible par Q_1. On verrait de même que le quotient de S_0 par S_3 est divisible par Q_2. Mais les séries Q_1 et Q_2 n'admettent pas de plus grand commun diviseur (théorème IX). Donc le quotient $\frac{S_0}{S_3}$ est divisible par le produit $Q_1 Q_2$ d'après le théorème précédent. De là suit qu'on peut fixer un domaine de l'origine dans lequel on a

$$S_0 = S_3 Q_1 Q_2 Q_3,$$

Q_3 étant une série entière. De cette relation on déduit

$$S_0 = \frac{S_1 S_2}{S_3} Q_3.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème donne la forme de toute série divisible séparément par deux autres.

On peut appeler la série $\frac{S_1 S_2}{S_3}$ le *plus petit multiple commun* des deux séries S_1 et S_2.

Les deux derniers théorèmes font encore ressortir l'analogie qui existe entre les théorèmes relatifs à la divisibilité des séries et ceux qui sont relatifs à la divisibilité des polynômes. Il serait aisé de poursuivre

cette analogie et, en particulier, de considérer la recherche du plus grand commun diviseur et celle du plus petit multiple commun pour le cas de plusieurs séries.

IV.

Des points singuliers des fonctions uniformes de plusieurs variables indépendantes.

Une fonction uniforme des variables $z_1, \ldots, z_n$ est dite *régulière au point a* si, dans un certain domaine de ce point, on peut la mettre sous la forme

$$\Sigma A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z_1-a_1)^{\nu_1}(z_2-a_2)^{\nu_2}\ldots(z_n-a_n)^{\nu_n} \quad (\nu_1,\ldots,\nu_n=0,1,\ldots,\infty).$$

où les ν sont des nombres entiers et les A des coefficients constants; autrement dit, si la fonction peut être développée en série entière relativement aux différences $(z_i - a_i)$, série convergente dans l'aire considérée. Si la grandeur a_i a un module infini, on remplace $(z_i - a_i)$ par $\frac{1}{z_i}$.

Une fonction régulière en un point est holomorphe dans le domaine de ce point (théorème II). Réciproquement, une fonction qui est holomorphe dans une aire est régulière pour tout point de cette aire. Considérons, en effet, un point $a_1, \ldots, a_n$ situé dans l'aire où la fonction est holomorphe. Sur le plan de la variable a_i, on peut décrire un cercle de centre a_i qui soit tout entier compris dans l'intérieur de l'aire dans laquelle la fonction est holomorphe. Alors, la fonction étant holomorphe en tous les points de l'aire formée par les cercles a_i, on peut la représenter dans cette aire par une série entière par rapport aux différences $(z_1 - a_1), \ldots, (z_n - a_n)$. En particulier, une fonction régulière au point a est régulière en tout point du domaine de a.

Un point pour lequel une fonction uniforme n'est pas régulière est dit *point singulier*. Soit a un tel point. Si l'on peut former une série entière en $(z_1 - a_1), \ldots, (z_n - a_n)$, S_0, convergente dans un domaine de a, qui s'annule en a et soit telle que le produit

$$S_0 f(z_1, \ldots, z_n)$$

soit lui-même une fonction régulière au point a, on dit que a est un *point singulier non essentiel* de la fonction $f(z_1, \dots, z_n)$. Dans tout autre cas, le point singulier est dit *essentiel*.

Si le nombre des variables est au moins deux, on distingue deux sortes de points singuliers non essentiels. Soit a un tel point. On a, dans le domaine δ de ce point, $f(z_1, \dots, z_n) = \frac{S_1}{S_0}$, S_0, S_1 désignant des séries entières en $(z_1 - a_1)$, ..., $(z_n - a_n)$ convergentes dans le domaine δ, et S_0 s'annulant au point a. Supposons que S_1 soit différente de o en ce point. Les fonctions S sont continues au point a. Prenons arbitrairement un nombre positif ε inférieur au module de la valeur que prend S_1 en a, ce que nous écrirons $\varepsilon < |S_1|_a$. Nous pouvons déterminer un nombre positif $\delta'(\delta' \leqq \delta)$ tel qu'on ait, pour tout point du domaine δ' de a, $|S_0| < \varepsilon$. Nous pouvons, en outre, déterminer un nombre positif $\delta''(\delta'' \leqq \delta)$, tel que le module de l'accroissement de S_1 quand on passe du point a à un point quelconque du domaine δ'' de a soit inférieur à ε. Prenons alors δ_1 égal au plus petit des deux nombres δ', δ''. On aura, pour tout point du domaine δ_1 de a,

$$|S_0| < \varepsilon, \quad |S_1| > |S_1|_a - \varepsilon$$

et

$$|f| = \frac{|S_1|}{|S_0|} > \frac{|S_1|_a - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Soit A un nombre positif choisi arbitrairement. Si l'on prend $\varepsilon < \frac{|S_1|_a}{1 + A}$, on aura $|f| > A$, et l'on voit que, pour tout point de δ_1, le module de la fonction considérée est supérieur à tout nombre donné A.

Supposons maintenant que S_1 s'annule au point a. Les séries S peuvent admettre un diviseur comme nul au point a. Dans ce cas, en désignant par S_2 leur plus grand commun diviseur et par S_3, S_4 les quotients, on aura

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{S_1}{S_0} = \frac{S_2 S_3}{S_2 S_4} = \frac{S_3}{S_4},$$

et l'on sait (théorème IX) que les nouvelles séries S_3, S_4 n'admettent pas de diviseur commun nul au point a. Il suffit donc de considérer le cas où les deux séries S n'admettent pas de diviseur commun nul au point a. On sait, par les Chapitres précédents, qu'on peut former des

fonctions $t_1, t_2, \ldots, t_n$, linéaires et homogènes en $(z_i - a_i)$, au moyen desquelles, dans un domaine $\delta'(\delta' \leqq \delta)$ du point a, les séries S se mettent sous les formes

$$\Sigma_0 = [t_1^\mu + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \ldots + P_0^{(\mu)}]\Sigma'_0,$$
$$\Sigma_1 = [t_1^\nu + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_1^{(\nu)}]\Sigma'_1,$$

et l'on se rappelle les propriétés des fonctions P, Σ'_0, Σ'_1.

On peut, puisque Σ_0 et Σ_1 n'ont pas de diviseur commun, prendre dans le domaine δ' des valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ pour lesquelles les polynômes en t_1 n'ont pas de racines communes. Autrement dit, il y a certainement dans le domaine δ' au moins un point pour lequel $S_0 = 0$, $S_1 \neq 0$. La fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est infinie en ce point.

Soit maintenant K une constante arbitraire. On a, dans le domaine δ',

$$S_0[f(z_1, \ldots, z_n) - K] = S_1 - S_0 K = S_2,$$

S_2 étant une série entière, nulle au point a. Dès lors la fonction $\frac{1}{f(z_1, \ldots, z_n) - K}$ est placée dans les mêmes conditions que $f(z_1, \ldots, z_n)$. Par suite, on peut trouver un point dans le domaine δ' pour lequel $\frac{1}{f(z_1, \ldots, z_n) - K} = \infty$, c'est-à-dire $f(z_1, \ldots, z_n) = K$. Le point a est donc tel qu'il existe toujours dans son domaine au moins un point pour lequel la fonction prend une valeur arbitraire, c'est-à-dire que la fonction est complètement indéterminée au point a.

On reconnaît ainsi que la nature du point singulier non essentiel est différente, suivant que le numérateur de la fraction par laquelle la fonction est représentée dans le domaine du point est nul ou non en ce point. Dans la seconde hypothèse, on peut déterminer un domaine du point singulier tel que, pour tout point de ce domaine, la fonction prend une valeur dont le module surpasse tout nombre donné; on peut dire que la fonction prend une valeur infinie pour le point singulier. Dans la première hypothèse, il est possible de fixer un domaine du point singulier tel qu'il existe au moins un point du domaine, pour lequel la fonction prend une valeur assignée à l'avance d'une manière arbitraire; la fonction est indéterminée pour le point singulier.

Comme application, étudions les points singuliers d'un polynôme

entier, d'une fraction rationnelle, et enfin d'une fraction ayant pour termes des séries entières.

Théorème XIII. — *Un polynôme entier n'a pas de points singuliers essentiels.*

Un polynôme, étant holomorphe pour toutes les valeurs finies des variables, sera une fonction régulière pour tout point à distance finie. Considérons un point pour lequel quelques-unes des variables, ou toutes, prennent un module infini. Soit le polynôme $f(z_1, \ldots, z_n)$; soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les degrés de f par rapport à z_1, à $z_2, \ldots$, à z_n. Enfin supposons que $z_i (i = 1, 2, \ldots, p) p \leqq n$, prennent des modules infinis pour le point considéré, les autres variables étant finies. On a

$$(1) \qquad \frac{1}{z_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}} f(z_1, \ldots, z_n) = \Sigma A \frac{1}{z_1^{m'_1}} \cdots \frac{1}{z_i^{m'_i}} z_{i+1}^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_{n-i}},$$

A étant un coefficient constant, $m'_1, \ldots, m'_i$ étant des nombres entiers positifs ou nuls, de même que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-i}$. Formons de la manière suivante un domaine du point considéré. Sur le plan de chacune des variables $z_1, \ldots, z_i$ décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon donné R. Sur le plan de chacune des variables $z_{i+1}, \ldots, z_n$ décrivons un cercle de centre $a_{i+1}, \ldots, a_n$ et de rayon r. Nous prendrons pour domaine δ du point considéré,

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_i = \infty, \quad z_{i+1} = a_{i+1}, \quad \ldots, \quad z_n = a_n,$$

l'ensemble des cercles r et l'ensemble des aires extérieures aux cercles R. Posons

$$z_1 = \frac{1}{u_1}, \quad \ldots, \quad z_i = \frac{1}{u_i},$$

le second membre de la relation précédente devient

$$(2) \qquad \Sigma A u_1^{m'_1} \ldots u_i^{m'_i} z_{i+1}^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_{n-i}}.$$

Au domaine δ correspond, pour les variables $u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n$ un domaine δ' formé par l'ensemble des cercles r et par i cercles décrits sur les plans des variables u de chaque origine comme centres avec des rayons égaux à $\frac{1}{R}$. Il est clair que la somme (2) est holomorphe en

chaque point de δ'. On peut donc la représenter par une série entière par rapport à $u_1, \ldots, u_i, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. Si l'on remplace les u par leurs valeurs en fonction des z, on a une série entière en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. Soit cette série

$$S\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right].$$

La relation (1) montre alors que l'on a pour tout point du domaine δ

$$\frac{1}{z_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}} f(z_1, \ldots, z_n) = S\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right].$$

De là résulte que le point considéré est un point singulier non essentiel, puisque l'on peut considérer le produit $\frac{1}{z_1^{m_1}} \cdots, \frac{1}{z_i^{m_i}}$ comme une série entière en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$, série qui s'annule au point $(z_1 = z_2 = \ldots = z_i = \infty, z_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, z_n = a_n)$.

Remarquons, en outre, que les deux sortes de points singuliers non essentiels peuvent se présenter. Supposons que dans le polynôme donné figure le terme $Az_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}$, A étant un coefficient constant. Alors la somme (2) contiendra un terme, A, indépendant des u et des z; la série S prendra donc une valeur différente de 0 au point considéré, et le module de f deviendra infini en ce point. Au contraire, si dans le polynôme il n'y a aucun terme renfermant à la fois $z_1, z_2, \ldots, z_i$, aux puissances respectives $m_1, m_2, \ldots, m_i$, chacun des termes de (2) contiendra en facteur l'une au moins des variables u, et par conséquent la série S s'annulera au point considéré. On a alors un point singulier non essentiel dans le domaine duquel on peut toujours trouver un point qui donne à la fonction une valeur choisie arbitrairement.

Théorème XIV. — *Une fraction rationnelle des variables $z_1, \ldots, z_n$ ne présente pas de points singuliers essentiels.*

Soient φ et ψ deux polynômes entiers par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$. Le quotient

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\varphi(z_1, \ldots, z_n)}{\psi(z_1, \ldots, z_n)}$$

constitue une fonction uniforme des variables z. Prenons d'abord un point a à distance finie. Si $\psi(a) \neq 0$, on peut déterminer un domaine de a dans lequel ψ ne s'annule pas. Alors f est holomorphe en tout point de ce domaine, et par suite f est régulière au point a. Soit maintenant $\psi(a) = 0$. Prenons pour domaine de a l'ensemble des cercles décrits de $a_1, \ldots, a_n$ comme centres avec des rayons égaux à un nombre R choisi arbitrairement. On a pour ce domaine

$$\psi(z_1, \ldots, z_n)\, f(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(z_1, \ldots, z_n).$$

φ et ψ sont holomorphes, et $\psi(a) = 0$. On voit donc que a est un point singulier non essentiel. Suivant que $\varphi(a)$ sera différent de o ou nul, on aura un point singulier non essentiel de l'une ou l'autre espèce.

Considérons un point a pour lequel les modules de certaines variables deviennent infinis, les modules des autres restant finis. Soient $z_1, \ldots, z_i$ les variables dont les modules sont infinis, et $a_{i+1}, \ldots, a_n$ les valeurs finies des autres variables. Désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_i$ les degrés du polynôme φ par rapport à z_1, à $z_2, \ldots$, à z_i, et par $p_1, \ldots, p_i$ les degrés de ψ par rapport aux mêmes variables. On a identiquement

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{z_1^{p_1 - m_1}, \ldots, z_i^{p_i - m_i}} \frac{\varphi'(u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)}{\psi'(u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)},$$

où $u_1 = \frac{1}{z_1}, \ldots, u_i = \frac{1}{z_i}$, et où φ' et ψ' désignent des polynômes entiers par rapport aux variables u et z. Formons le domaine δ du point a comme dans le théorème précédent, et appelons encore δ' le domaine correspondant pour les valeurs u et $z_{i+1}, \ldots, z_n$. Comme on l'a vu plus haut, le point a n'est pas un point singulier essentiel pour le quotient $\frac{\varphi'}{\psi'}$. On peut former un domaine de a, δ_1 $(\delta_1 \leq \delta)$, dans lequel on a

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{S}{S'},$$

S, S′ désignant des séries entières en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. De plus, la série S′ sera nulle au point a si a est un point singulier du quotient; elle se réduira à une constante, si le quotient

est régulier en a. On a donc pour tout point de δ_1

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{z_1^{p_1 - m_1} \ldots z_i^{p_i - m_i}} \frac{S}{S'}.$$

Par suite, si $p \geqq m_1, \ldots, p_i \geqq m_i$, on peut poser

$$S'f = Q\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right],$$

où $Q\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, (z_n - a_n)\right]$ désigne une série entière, et a est un point pour lequel f est régulier si $S'(a)$ est une constante, un point singulier non essentiel si $S'(a)$ est nulle.

Dans le cas où chaque nombre p n'est pas supérieur ou égal au nombre correspondant m, on aura $Q'f = Q$, Q, Q' ayant toujours des significations analogues, et alors a est un point singulier non essentiel.

On peut remarquer que, lorsque a est un point singulier, $Q(a) = 0$, et par suite la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est indéterminée en ce point.

Théorème XV. — *Soient* S_0, S_1 *deux séries entières convergentes pour tous les points d'une aire* A *formée en prenant sur le plan de chaque variable le cercle de rayon* R *ayant l'origine pour centre. On peut considérer la fraction* $\frac{S_1}{S_0}$ *comme une fonction uniforme, définie seulement dans l'aire* A, *et ne présentant dans cette aire aucun point singulier essentiel.*

Soit a un point de l'aire pour lequel $S_0(a) \neq 0$. Le quotient a une valeur déterminée. On peut former un domaine δ de a dans lequel $S_0 \neq 0$. On a dans ce domaine $f = \frac{S_1}{S_0}$, et, comme ce quotient est holomorphe, on voit que f est régulière en a.

Considérons maintenant un point pour lequel $S_1(a) \neq 0$, $S_0(a) = 0$. On peut former un domaine de a pour lequel $S_1 \neq 0$. On a, pour ce domaine,

$$S_0 f = S_1,$$

et, par suite, a est un point singulier non essentiel pour lequel la fonction devient infinie.

Enfin prenons un point a pour lequel $S_1(a) = S_0(a) = 0$. On sait que l'on peut former un domaine δ de ce point dans lequel on a $S_0 = S_2 S_3$, $S_1 = S_2 S_4$, les séries S_3, S_4 n'ayant aucun diviseur commun nul au point a. Alors on voit que l'on a, pour tout point de δ, $S_3 f = S_4$, et par suite a est un point singulier essentiel pour lequel la fonction est indéterminée.

Soient n quantités données $a_1, \ldots, a_n$. Nous dirons, pour abréger le langage, qu'un point est *formé avec les a*, si, pour former ce point, on attribue à certaines des variables $z_1, \ldots, z_n$ les valeurs correspondantes dans la suite $a_1, \ldots, a_n$. En particulier, on dira qu'un point est à l'infini si quelques-unes des variables, ou toutes, prennent des modules infinis; et l'on dira qu'un point est à distance finie si les modules des variables sont tous finis.

Considérons la fraction

$$f = \frac{A}{(z_1 - a_1)^{p_1} \ldots (z_n - a_n)^{p_n}},$$

où A est une constante et les p des nombres entiers positifs. Tout point à distance finie et formé avec les a est un point singulier non essentiel. La fraction est régulière, au contraire, pour tout point à distance finie qui n'est pas formé avec les a. La fraction est régulière et s'annule pour tout point à l'infini qui n'est pas formé avec les a. Considérons un point à l'infini formé avec les a. Soit, par exemple, $z_1 = a_1$, $z_2 = \infty, \ldots, z_3, \ldots, z_n$ ayant des valeurs finies respectivement différentes de $a_3, \ldots a_n$. On a

$$(z_1 - a_1)^{p_1} f = \frac{A}{(z_2 - a_2)^{p_2} \ldots (z_n - a_n)^{p_n}},$$

et le second nombre est une fonction régulière au point considéré. On voit donc que ce point est un point singulier non essentiel.

Ainsi, étant données n quantités $a_1, \ldots, a_n$, il est possible de former une fonction rationnelle des variables $z_1, \ldots, z_n$ qui n'aura pas de points singuliers essentiels, n'admettra comme points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les a, et s'annulera pour tout point à l'infini qui n'est pas un point singulier non essentiel.

On peut recommencer le même raisonnement en supposant cer-

taines des quantités a infinies, pourvu que dans ce cas on remplace la différence $z_\nu - a_\nu$, qui correspond à $|a_\nu| = \infty$, par $\frac{1}{z_\nu}$.

La considération de ces fractions est utile dans la démonstration du théorème suivant, théorème que l'on peut considérer comme une généralisation d'un théorème de M. Mittag-Leffler pour les fonctions d'une seule variable.

Avant d'aborder ce théorème, rappelons qu'on nomme *fonction entière* une fonction uniforme qui est régulière en tous les points formés par des valeurs des variables dont les modules sont finis. On voit qu'une telle fonction peut être représentée par une série entière convergente pour tout système de valeurs des variables dont les modules sont finis. Réciproquement, une telle série est une fonction entière. Si la série qui représente une fonction entière a une infinité de termes dont les coefficients ne sont pas nuls, on dit que la fonction est *transcendante*. Dans le cas contraire, on dit que la fonction est *rationnelle*.

THÉORÈME XVI. — 1° *Soient données n suites*

$$\begin{array}{cccccc} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_\nu^1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_\nu^n & \ldots \end{array}$$

telles que dans chacune d'elles les modules croissent avec l'indice ν et croissent indéfiniment.

2° *Soit donnée une suite indéfinie de fonctions rationnelles f_i des variables $z_1, \ldots, z_n$ possédant les propriétés suivantes. La fonction f_ν, par exemple, n'a pas de points singuliers essentiels; elle n'admet pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les quantités a_ν: elle est régulière en tout autre point et s'annule pour tout point à l'infini qui n'est pas un point singulier non essentiel.*

On peut former une fonction $F(z_1, \ldots, z_n)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° *Elle n'a pas de points singuliers essentiels à distance finie;*

2° *Elle n'a pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les quantités a, en prenant pour certaines des variables*

$z_1, \ldots, z_n$ *une valeur dans celle des séries* $a^1, \ldots, a^n$ *qui lui correspond* (*à la variable* z_i, *on fait correspondre la série* a^i);

3° *Enfin, pour toute valeur de* ν, *la différence*

$$F(z_1, \ldots, z_n) - f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

est régulière au point a_ν.

Prenons arbitrairement une suite de nombres positifs inférieurs à 1, dont la somme ait une limite δ. Soit

$$0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots < 1.$$

Prenons aussi arbitrairement un nombre ε, positif et moindre que 1.

Nous formons d'abord des fonctions auxiliaires F_ν de la manière suivante.

Si l'une des quantités a_ν est nulle, on pose

$$F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_1, \ldots, z_n).$$

Soit $a_\nu^1 a_\nu^2 \ldots a_\nu^n \neq 0$. Sur le plan de chaque variable z_i, décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et laissant le point a_ν^i en dehors. Désignons par A_ν l'aire formée par l'ensemble de ces cercles. La fonction f_ν est holomorphe dans A_ν, puisque, par hypothèse, elle est régulière en tous les points de cette aire. Soit

$$(1) \qquad \sum_{\mu_1 \ldots = 0}^{\infty} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}$$

la série qui représente f_ν dans A_ν. Nous pouvons disposer dans l'ordre suivant les termes de cette série. Prenons d'abord le terme constant. Ensuite écrivons les termes qui sont du premier degré par rapport aux variables, puis les termes du second degré et ainsi de suite. C'est l'ordre indiqué pour écrire les termes d'une série entière. Représentons par le symbole suivant la série obtenue en retranchant de la première tous les termes dont le degré n'atteint pas m :

$$\sum_{m}^{\infty} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}.$$

On peut déterminer m tel que, pour les valeurs

$$\left|\frac{z_i}{a_\nu^i}\right| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on ait

$$(2) \qquad \left|\sum_m^\infty A_{\mu_1,\ldots,\mu_n} z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}\right| < \varepsilon_\nu.$$

On a, en effet, pour ces valeurs des variables,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \left|\sum_m^\infty A_{\mu_1,\ldots,\mu_n} z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}\right| &< \sum_m^\infty |A_{\mu_1,\ldots,\mu_n}|\,|z_1|^{\mu_1}\ldots|z_n|^{\mu_n}\ldots \\ &< \sum_{p=m}^{p=\infty} |A_{\mu_1,\ldots,\mu_n}|\,\varepsilon^p\,|a_\nu^1|^{\mu_1}\ldots|a_\nu^n|^{\mu_n}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\left|\frac{z_i}{a_\nu^i}\right| = \varepsilon_0, \quad \varepsilon < \varepsilon_0 < 1.$$

Soit M le maximum des modules des termes de la série (1). On aura

$$|A_{\mu_1,\ldots,\mu_n}|\,\varepsilon_0^p\,|a_\nu^1|^{\mu_1}\ldots|a_\nu^n|^{\mu_n} \leqq M,$$

et

$$|A_{\mu_1,\ldots,\mu_n}| \leqq M\varepsilon_0^{-p}\,|a_\nu^1|^{-\mu_1}\ldots|a_\nu^n|^{-\mu_n}.$$

La relation (3) donne alors

$$\left|\sum_m^\infty A_{\mu_1,\ldots,\mu_n} z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}\right| < \sum_{p=m}^{\infty} M\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^p < M\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Posons

$$M\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \leqq \varepsilon_\nu,$$

d'où

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{M}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right).$$

Si l'on désigne par m_ν la plus petite valeur entière positive de m qui

vérifie cette relation, on aura

$$(4)\qquad \left|\sum_{m_\nu}^{\infty} A_{\mu_1,\ldots,\mu_n} z_1^{\mu_1},\ldots,z_n^{\mu_n}\right| < \varepsilon_\nu,$$

ce qui est l'inégalité que nous cherchions à obtenir.

Cela posé, définissons la fonction F_ν par la relation

$$(5)\qquad F_\nu(z_1,\ldots,z_n) = f_\nu(z_1,\ldots,z_n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1,\ldots,\mu_n} z_1^{\mu_1}\ldots z_n^{\mu_n}.$$

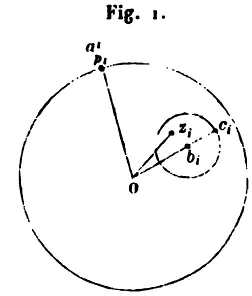
La somme figurant au second membre est un polynôme entier. Par suite, F_ν est régulière en même temps que f_ν; elle admet les mêmes points singuliers non essentiels que f_ν et, en outre, ceux qu'on forme en prenant des valeurs infinies pour les variables. De plus, F_ν n'a pas de points singuliers essentiels.

Je dis maintenant que la série

$$(6)\qquad F(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z_1,\ldots,z_n)$$

est convergente pour tout point, à distance finie, qui n'est pas formé

Fig. 1.



au moyen des a. Soit $b_1,\ldots,b_n$ un tel point. Sur le plan de z_1 décrivons de b_1 comme centre un cercle de rayon ρ qui ne comprenne aucun des points a', ni l'origine des coordonnées. Faisons de même sur le plan de chaque variable. Appelons R l'aire formée par l'ensemble de ces cercles. Sur le plan de z_1, de l'origine pour centre, décrivons les

différents cercles qui passent par les différents points a^1, et appelons $a^1_{p_1}$ le point qui détermine le cercle de plus petit rayon parmi ceux qui entourent complètement le cercle ρ. Faisons de même sur les plans des autres variables, et soient $a^2_{p_2}, \ldots, a^n_{p_n}$ les points analogues à $a^1_{p_1}$. Les suites (1) se composant de quantités dont les modules croissent indéfiniment, on peut trouver un nombre k, tel que l'on ait

$$|a^1_k| \geqq |a^1_{p_1}| \ldots |a^n_k| \geqq a^n_{p_n}.$$

Si maintenant nous prenons un point quelconque dans R, nous aurons

$$\left|\frac{z_i}{a^i_{p_i}}\right| < \frac{\mathrm{O}c_i}{\mathrm{O}a^i_{p_i}},$$

et, en appelant ε le plus grand des quotients $\dfrac{\mathrm{O}c_i}{\mathrm{O}a^i_{p_i}}$, on aura

$$\left|\frac{z_i}{a^i_\nu}\right| < \left|\frac{z_i}{a^i_{p_i}}\right| < \varepsilon \quad (\nu \geqq k).$$

En se reportant au calcul précédent, on voit maintenant que

$$|\mathrm{F}_\nu| \leqq \varepsilon_\nu, \quad \sum_{\nu=k}^{\infty} |\mathrm{F}_\nu| \leqq \delta.$$

Or

$$\mathrm{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} \mathrm{F}_\nu + \sum_{\nu=k}^{\infty} \mathrm{F}_\nu.$$

La première somme a une valeur déterminée, et la seconde est une série uniformément convergente, puisque la série formée par les modules de ses termes est elle-même convergente. On voit par là que F est une fonction holomorphe dans R. Par conséquent, la fonction définie par la relation (6) est une fonction régulière pour tout point qui n'est formé ni avec des valeurs a ni avec des valeurs infinies des variables.

Considérons maintenant un point formé au moyen de a. Ce point est singulier non essentiel pour certaines des fonctions F_ν Si nous appelons S la somme de ces fonctions, on aura

$$\mathrm{F} = (\mathrm{F} - \mathrm{S}) + \mathrm{S}.$$

$(F - S)$ est régulière au point considéré, tandis que ce point est singulier non essentiel pour S. Donc on peut considérer la fonction F comme définie en ce point, qui sera un point singulier non essentiel.

De ce qui précède résulte que la relation (6) définit une fonction uniforme qui n'a pas de points singuliers essentiels à distance finie, pour laquelle tout point formé avec les a est un point singulier non essentiel, et qui est régulière en tout autre point.

Démontrons enfin que $F - f_\nu$ reste finie pour le point a_ν. Sur le plan de z_1 décrivons un cercle de centre a_ν^1 et de rayon ρ qui ne comprenne aucun des points a_i. Faisons de même pour le plan de chacune des autres variables et appelons R l'aire formée par ces cercles La série

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda(z_1, \ldots, z_n)\right] - F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

est holomorphe dans R. On peut la développer en série entière $P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n)$, de sorte que l'on a pour tout point de R

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda(z_1, \ldots, z_n)\right] - F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n),$$

$$F(z_1, \ldots, z_n) = F_\nu(z_1 \ldots, z_n) + P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n).$$

Or

$$F(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_1, \ldots, z_n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}.$$

L'expression $\sum_0^{\mu_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}$ est un polynôme entier en $z_1, \ldots, z_n$.

Donc la différence

$$P(z_1 - a_\nu^1 \ldots, z_n - a_\nu^n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1}, \ldots z_n^{\mu_n}$$

est elle-même holomorphe dans R. Représentons-la par une série entière, $P_1(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n)$. On aura, pour tout point de R,

$$F(z_1, \ldots, z_n) - f_\nu(z_1, \ldots, z_n) = P_1(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n).$$

ce qui montre que la différence $F - f_\nu$ est régulière au point a_ν. Le théorème se trouve ainsi démontré.

COROLLAIRE. — $G(z_1, \ldots, z_n)$ *désignant une fonction entière, la fonction*

$$H(z_1, \ldots, z_n) = F(z_1, \ldots, z_n) + G(z_1, \ldots, z_n)$$

possède les propriétés que l'on vient de démontrer pour la fonction $F(z_1, \ldots, z_n)$.

RÉCIPROQUE. — *Si* $H(z_1, \ldots, z_n)$ *possède les mêmes propriétés que la fonction* $F(z_1, \ldots, z_n)$, *la différence* $H - F$ *est une fonction entière.*

Reportons-nous aux notations précédentes. Si nous prenons un point qui n'est pas formé avec les a, H et F étant toutes deux régulières, il en est de même pour leur différence. Considérons ensuite un point formé avec les a. Ce point est singulier non essentiel pour certaines des fonctions f_ν. Soit p leur nombre ($p \leq n$) et soient ces fonctions $f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_p}$. On sait que les différences

$$\begin{gathered} H - f_{\nu_1},\ H - f_{\nu_2},\ \ldots,\ H - f_{\nu_p}, \\ F - f_{\nu_1},\ F - f_{\nu_2},\ \ldots,\ F - f_{\nu_p} \end{gathered}$$

sont toutes finies pour le point considéré. On a

$$p(H - F) = (H - f_{\nu_1}) + \ldots + (H - f_{\nu_p}) - (F - f_{\nu_1}) - \ldots - (F - f_{\nu_p}),$$

et le second membre de cette égalité a une valeur finie. La différence $(H - F)$ est donc finie en ce point et, par suite, elle est régulière en ce point. $H - F$ étant régulière en tout point à distance finie est une fonction entière.

THÉORÈME XVII. — *Soient données :*

1° *n quantités* $c_1, \ldots, c_n$ *et n suites illimitées*

$$\begin{matrix} a_1^1, & a_2^1, & \ldots, & a_\nu^1, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_1^n, & a_2^n, & \ldots, & a_\nu^n, & \ldots \end{matrix}$$

telles que chaque quantité a soit différente des c et telles, en outre, que le module de la différence $a_\nu^p - c_p$ *décroisse et tende vers* 0 *quand* ν *croît indéfiniment ;*

2° *Une suite illimitée de fonctions rationnelles* f_1 *des variables* $z_1, \ldots, z_n$ *telles que la fonction* f_ν, *par exemple, n'admette pour points singuliers que ceux qui sont formés avec les quantités* a_ν *ne présente pas de points singuliers essentiels et s'annule pour tout point formé avec les* c.

On peut former une fonction uniforme $F(z_1, \ldots, z_n)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° *Elle n'admet pour points singuliers essentiels que ceux qui sont formés avec les* c.

2° *Elle n'a pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les* a, *sans le secours des* c.

3° *Enfin, pour toute valeur de* ν *la différence* $F - f_\nu$ *est régulière au point* a.

Posons

$$\begin{array}{llll} z'_1 = \dfrac{1}{z_1 - c_1}, & \ldots, & z'_n = \dfrac{1}{z_n - c_n}, & \\ b_1^1 = \dfrac{1}{a_1^1 - c_1}, & \ldots, & b_\nu^1 = \dfrac{1}{a_\nu^1 - c_1}, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ b_1^n = \dfrac{1}{a_1^n - c_n}, & \ldots, & b_\nu^n = \dfrac{1}{a_\nu^n - c_n}, & \ldots. \end{array}$$

Les fonctions données f deviennent des fonctions rationnelles des variables z'. Si l'on considère ces nouvelles fonctions et les quantités b, on est placé dans les conditions du théorème précédent. On formera la fonction $F(z'_1, \ldots, z'_n)$ comme plus haut, et, si l'on y remplace z'_1 par $\dfrac{1}{z_1 - c_1}$, $\ldots$, z'_n par $\dfrac{1}{z_n - c_n}$, on aura la fonction cherchée.

On voit sans peine que le corollaire du théorème précédent et sa réciproque se généralisent d'une manière analogue.

Théorème XVIII. — *Soient* N, D, N′, D′ *des séries entières convergentes pour toutes les valeurs des variables* $z_1, \ldots, z_n$ *situées dans une aire* A, *et telles que les deux fractions* $\dfrac{N}{D}$, $\dfrac{N'}{D'}$ *soient holomorphes et égales en tous les points d'une aire* A′ *comprise dans* A. *Alors :*

1° *Si en un point de* A *l'une des fractions est régulière et prend la valeur* A_0, *il en est de même pour la seconde ;*

2° *Si un point de* A *est point singulier pour l'une des fractions, il l'est aussi pour l'autre, et le point singulier est de même espèce pour chacune des fractions.*

Nous énoncerons plus rapidement ce théorème en disant que *les deux fractions sont égales en tous les points de* A.

On a dans A'

$$\frac{N}{D} = \frac{N'}{D'}, \quad ND' = DN'. \tag{1}$$

Les deux membres de (1) étant holomorphes dans A, la relation (1) subsiste pour toute l'aire A (théorème IV). Supposons que $\frac{N}{D}$, par exemple, soit régulière en un point. On peut fixer un domaine δ de ce point dans lequel on a

$$\frac{N}{D} = S \quad \text{ou} \quad N = DS,$$

S étant une série entière convergente dans δ. La relation (1) donne alors, dans δ,

$$DSD' = DN'.$$

D n'est pas nul en tous les points de δ, et l'on peut fixer un domaine $\delta' < \delta$ dans lequel $D \neq 0$. On aura donc, dans δ',

$$SD' = N',$$

et, par suite, cette relation subsistera pour tout point de δ, puisque N' et SD' sont holomorphes dans δ. On a alors

$$\frac{N'}{D'} = \frac{SD'}{D'} = S,$$

et l'on voit que la fraction $\frac{N'}{D'}$ est régulière au point considéré et y prend la même valeur que $\frac{N}{D}$.

Considérons un point singulier de $\frac{N}{D}$. D'après ce qui précède, ce point est singulier pour $\frac{N'}{D'}$. Supposons que dans un domaine δ du point

considéré on ait $S_0 \frac{N}{D} = S_1$, la série S_0 s'annulant au point que nous considérons. De la relation (1) et de la précédente, on déduit, pour tout point de δ,

$$S_0 N = S_1 D, \quad S_0 N D' = S_0 N' D, \quad D D' S_1 = S_0 N' D,$$

et, en raisonnant comme plus haut,

$$D' S_1 = N' S_0, \quad S_0 \frac{N'}{D'} = \frac{S_0 N'}{D'} = \frac{D' S_1}{D'} = S_1.$$

Cette relation montre que le point singulier est non essentiel pour $\frac{N'}{D'}$ comme pour $\frac{N}{D}$, et qu'il est de même espèce pour les deux fractions.

Enfin, si nous considérons un point singulier essentiel de $\frac{N}{D}$, on voit, par ce qui précède, que le même point est singulier essentiel pour $\frac{N'}{D'}$.

Théorème XIX. — *Soit $f(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction uniforme des variables z, qui ne présente aucun point singulier essentiel, et soit telle qu'en attribuant à p des variables des valeurs arbitraires choisies dans un domaine pour lequel $f(z_1, \ldots, z_n)$ est uniforme on forme une fonction de $(n-p)$ variables dépourvue de points singuliers essentiels. On peut déterminer deux polynômes entiers par rapport à toutes les variables z,* N *et* D, *tels que la fraction $\frac{N}{D}$ possède les propriétés suivantes :*

1° *Si $f(z_1, \ldots, z_n)$ est régulière en un point, il en est de même pour $\frac{N}{D}$, qui prend en ce point la même valeur que $f(z_1, \ldots, z_n)$, et réciproquement;*

2° *Tout point singulier de $f(z_1, \ldots, z_n)$ est un point singulier de même espèce pour $\frac{N}{D}$, et réciproquement.*

On peut énoncer le théorème en disant que l'on a pour tout point $f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{N}{D}$; autrement dit, *la fonction considérée est une fraction rationnelle.*

La démonstration de ce théorème est connue pour le cas d'une seule

variable ([1]). Nous la rendrons générale en montrant que, si l'on admet le théorème pour $(n-1)$ variables, il est vrai pour n.

Considérons un point du plan pour lequel la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est régulière, et, pour simplifier l'écriture, admettons que ce point soit l'origine des coordonnées. On a, dans un domaine δ de l'origine,

$$f(z_1, \ldots, z_n) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \ldots,$$

les A désignant des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$ toutes convergentes dans δ. Nous allons montrer que, dans le domaine δ, la fonction donnée est égale à une fraction rationnelle, et pour cela nous suivrons une méthode de calcul indiquée par M. Hurwitz ([2]). Sur le plan de z_2, traçons autour du point $z_2 = 0$ un cercle de rayon $\delta'(\delta' < \delta)$ et donnons à z_2 la valeur b_2 située dans δ'. La fonction $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$ ne présente pas de points singuliers essentiels et, comme elle ne dépend que de $n-1$ variables, elle peut être représentée par une fraction rationnelle. Soit donc

$$f(z_1, b_2 \ldots, z_n) = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r}{B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r},$$

les B désignant des polynômes entiers en $z_3, \ldots, z_n$, et r étant le plus haut exposant de z_1 dans les deux polynômes qui forment la fraction rationnelle. Si nous désignons par $\bar{A}$ la valeur que prend la série A pour $z_2 = b_2$, nous aurons pour tout point de δ

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 z_1 + \ldots = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r}{B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r}$$

$$(\bar{A}_0 + \bar{A}_1 z_1 + \ldots)(B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r) = B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r;$$

d'où, en égalant les coefficients des termes en $z_1^{r+1}, z_1^{r+2}, \ldots$

$$\begin{gathered}\bar{A}_1 B'_r + \bar{A}_2 B'_{r-1} + \ldots + \bar{A}_{r+i} B'_0 = 0,\\ \bar{A}_2 B'_r + \bar{A}_3 B'_{r-i} + \ldots + \bar{A}_{r+2} B'_0 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

([1]) BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2e édition, p. 206. — *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, von K. Weierstrass. *Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876. — E. PICARD, *Annales scientifiques de l'École Normale*, mars, avril, mai 1879.

([2]) *Journal de Crelle*, t. 95, p. 201 et suiv.

Les coefficients B′ n'étant pas tous nuls, puisque $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$ est régulière dans le domaine δ, tous les déterminants que l'on peut former en prenant $(r+1)$ quelconques des lignes suivantes sont nuls, quelles que soient les valeurs choisies dans le domaine δ pour les variables $z_3, z_4, \ldots, z_n$,

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \ldots & \overline{A}_{r+1} \\ \overline{A}_2 & \overline{A}_3 & \ldots & \overline{A}_{r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

A chaque point b_2 du domaine δ correspond une valeur de r, le nombre entier positif qui exprime le degré de la fraction rationnelle $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$. Je dis qu'il y a au moins une valeur de r qui correspond à une infinité de points b_2.

Deux cas se présentent : ou bien les valeurs que prend r ont un maximum, ou bien elles croissent au delà de toute limite. Dans le premier cas, si à chaque valeur de r correspondait un nombre limité de points b_2, le nombre des points b_2 serait limité, ce qui n'a pas lieu.

Considérons le second cas. Supposons qu'à chaque valeur $r_1, r_2, \ldots,$ du nombre r corresponde un nombre limité de points b_2. Les abscisses des points b_2 sont des nombres réels. Rangeons celles des points qui correspondent à r_1 suivant une loi déterminée, par exemple par ordre de grandeurs croissantes, en n'écrivant pas deux fois la même. Faisons de même pour les abscisses des points qui correspondent à r_2, etc., en ayant soin de ne pas répéter la même abscisse. Nous obtenons ainsi une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres qui se succèdent d'après une loi déterminée. Cette suite devrait contenir les abscisses de tous les points b_2 du domaine δ. Or M. Cantor a démontré (¹) que, « lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres, se succédant suivant une loi déterminée, $u_1, \ldots, u_\nu, \ldots$, on peut, dans chaque intervalle $(\alpha, \ldots, \beta)$ donné d'avance, déterminer un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite ». Prenons un tel nombre η. Ce nombre étant compris entre α et β, il y a un nombre infini de points b_2 du domaine δ qui admettent η pour

(¹) *Journal de Crelle*, t. 77, p. 258. La traduction en français des Mémoires de M. Cantor a été publiée dans les *Acta mathematica*, t. II, nº 4. La démonstration du théorème indiqué se trouve à la page 308.

abscisse, et alors la suite que nous avons formée ne contient pas les abscisses de tous les points b_2.

Ainsi se trouve établi qu'il y a certainement une valeur de r correspondant à une infinité de points b_2. Si l'on prend pour r cette valeur, on voit que les déterminants (1) sont nuls pour une infinité de valeurs de z_2 prises dans δ, $z_3, \ldots, z_n$ ayant d'ailleurs des valeurs arbitraires. Mais chacun de ces déterminants est une fonction holomorphe de z_2 dans δ. Dès lors ces déterminants s'annulent pour toutes les valeurs de z_2 situées dans δ.

Ainsi les déterminants formés avec $n+1$ quelconques des lignes

$$\tag{2} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{r+1} \\ A_2 & A_3 & \ldots & A_{r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

sont nuls, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables z.

Considérons les équations

$$\tag{3} \begin{cases} f_r A_1 + f_{r-1} A_2 + \ldots + f_0 A_{r+1} = 0, \\ f_r A_2 + f_{r-1} A_3 + \ldots + f_0 A_{r+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui sont en nombre illimité et dans lesquelles les f sont les inconnues. Les déterminants (2) étant nuls, ces équations définissent, dans le domaine δ, des fonctions régulières $f_0, \ldots, f_r$, qui ne sont pas toutes nulles ensemble. On a maintenant

$$f(z_1, \ldots, z_n)(f_0 + f_1 z_1 + \ldots + f_r z_1^r) = (A_0 + A_1 z_1 + \ldots)(f_0 + \ldots + f_r z_1^r).$$

Posons

$$\tag{4} \begin{cases} \varphi_0 = A_0 f_0, \\ \varphi_1 = A_0 f_1 + A_1 f_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_r = A_0 f_r + \ldots + A_r f_0. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (3) et (4), on aura, pour tout point du domaine δ,

$$\tag{5} f(z_1, \ldots, z_n)(f_0 + f_1 z_1 + \ldots + f_r z_1^r) = \varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \ldots + \varphi_r z_1^r.$$

Les fonctions φ, définies dans δ, sont régulières dans ce domaine.

Cela posé, prenons d'une manière arbitraire $2r+1$ points distincts dans le domaine δ du point $z_1=0$. Soient $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(2r+1)}$. On aura, pour tout point de δ,

$$f_0[f(z_1,\ldots,z_n)]+f_1[f(z_1,\ldots,z_n)z_1]+\ldots+f_r[f(z_1,\ldots,z_n)z_1^r]$$
$$-\varphi_0-z_1\varphi_1-\ldots-z_1^r\varphi_r=0,$$

$$f_0[f(a_1^{(1)},\ldots,z_n)]+f_1[f(a_1^{(1)},\ldots,z_n)a_1^{(1)}]+\ldots+f_r[f(a_1^{(1)},\ldots,z_n)(a_1^{(1)})^r]$$
$$-\varphi_0-a_1^{(1)}\varphi_1-\ldots-(a_1^{(1)})^r\varphi_r=0,$$

. . . . ,

$$f_0[f(a_1^{(2r+1)},\ldots,z_n)]+\ldots+f_r[f(a_1^{(2r+1)},\ldots,z_n)(a_1^{(2r+1)})^r]$$
$$-\varphi_0-a_1^{(2r+1)}\varphi_1-\ldots-(a_1^{(2r+1)})^r\varphi_r=0,$$

Nous avons là $2r+2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $2r+2$ quantités f et φ.

Ces quantités n'étant pas toutes nulles, le déterminant des équations est nul. Si l'on ordonne ce déterminant par rapport aux éléments de la première ligne, on obtient une équation qui montre que f est une fraction rationnelle des z, car les fonctions $f(a_1^{(i)},\ldots,z_n)$ sont elles-mêmes des fractions rationnelles de $z_2, \ldots, z_n$.

Toutefois, la conclusion n'est pas légitime si les déterminants d'ordre $(2r+1)$, qu'on déduit des lignes suivantes

$$f(a_1^{(i)},\ldots,z_n),\ \ldots,\ f(a_1^{(i)},\ldots,z_n)(a_1^{(i)})^r,\ 1,\ \ldots,\ (a_2^{(i)})^r \quad (i=1,\ldots,2r+1),$$

sont nuls pour chaque système de points $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(2r+1)}$. Dans ce cas, nous remarquerons que les déterminants d'ordre $2r+1$ formés, en remplaçant dans la première des lignes précédentes $a_1^{(1)}$ par z_1, sont nuls, pour tout point de δ. En ordonnant l'un d'eux par rapport aux éléments de la première ligne, on aura encore f sous forme de fraction rationnelle, à moins que les déterminants d'ordre $2r$, formés avec les $2r$ dernières lignes, ne soient nuls. Si cette circonstance se présentait, on remplacerait l'une des quantités $a_1^{(i)}$ $(i=2,\ldots,2r+1)$ par la variable z_1, et le raisonnement se poursuivrait de la même manière.

Ainsi, l'on peut admettre que l'on a, pour tout point du domaine δ,

la relation

$$(6) \qquad f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

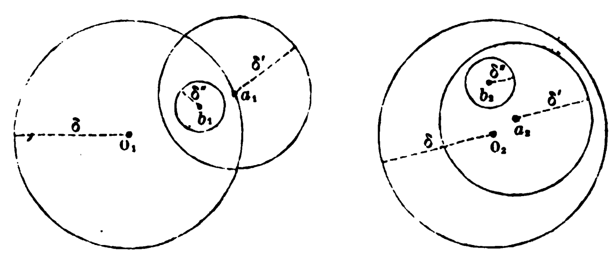
N et D étant des polynômes entiers en $z_1, \ldots, z_n$.

Nous allons maintenant montrer : 1° que si en un point du plan l'une des fonctions f et $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$ est régulière et prend la valeur A_0, il en est de même pour l'autre; 2° que si un point est singulier pour l'une des fonctions, il l'est pour l'autre, le point singulier étant de même espèce pour les deux fonctions.

La relation (6) est établie dans le domaine δ du point $o_1, \ldots, o_n$. Prenons arbitrairement $a_2, \ldots, a_n$ dans δ et a_1 sur la limite de ce domaine, comme l'indique la figure. On peut fixer un domaine δ' du point $a_1, \ldots, a_n$, tel qu'on ait, pour tout point de ce domaine, $f = \frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{S}_0}$, S_1 et S_0 étant deux séries convergentes dans δ'. De plus, nous pouvons prendre δ' assez petit pour que, sur le plan des variables $z_2, \ldots, z_n$, les domaines δ' soient compris dans δ.

Sur le plan de z_1, le cercle δ' (*fig.* 2) contiendra une aire extérieure

Fig. 2.



à δ. Désignons par A l'aire formée par les cercles δ' qui correspondent aux variables $z_2, \ldots, z_n$ et par l'aire comprise entre les cercles δ' et δ sur le plan de z_1. La série S_0, qui est holomorphe dans δ', ne peut s'annuler en tous les points de A, sans quoi elle serait nulle en tous les points de δ'. Soit $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un point de A pour lequel $\mathrm{S}_0 \neq 0$. On peut fixer un domaine δ'' de $b_1, \ldots, b_n$, dans lequel $\mathrm{S}_0 \neq 0$, et l'on peut réduire assez δ'' pour qu'il soit tout entier compris dans A, c'est-à-dire

dans δ'. Si nous remarquons que δ'' est compris dans δ, nous voyons que les deux fractions $\frac{N}{D}$ et $\frac{S_1}{S_0}$ sont holomorphes dans δ'' et égales en tous les points de ce domaine. D'après le théorème XVIII, ces deux fractions prennent donc la même valeur (au sens que nous avons indiqué pour cette locution) en tout point du domaine δ', dans lequel les quatre séries sont convergentes. Comme la fonction f est représentée dans δ' par $\frac{S_1}{S_0}$, on voit que la relation (6) subsiste dans δ'.

Nous avons pris $a_2, \ldots, a_n$ d'une manière arbitraire dans δ. Si nous répétons le raisonnement avec le point $z_1 = a_1$, $z_2 = a'_2, \ldots, z_n = a'_n$, $a'_2, \ldots, a'_n$ étant encore situés dans δ, on verra que, sur le plan z_1, on peut sortir de δ sans que la relation (6) cesse d'être vérifiée, pourvu que z_1 reste situé dans une certaine aire entourant le point a_1. Ainsi, d'une manière générale, la relation (6) est étendue à une aire Δ formée des cercles δ pour les variables $z_2, \ldots, z_n$ et pour la variable z_1 d'une aire composée de δ et d'une aire extérieure à δ entourant le point a_1. On peut maintenant raisonner sur Δ comme sur δ, et, en continuant de la même manière, on agrandira l'aire Δ autant qu'on le voudra, puisque les polynômes N et D sont définis dans tout le plan. Dès lors, la relation (6) est démontrée pour tout point formé, en donnant à z_1 une valeur quelconque et à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs situées dans δ.

Raisonnant maintenant avec z_2 comme avec z_1, puis avec z_3, etc., on verra que la relation (6) est vérifiée pour tout point du plan, en sorte que le théorème est démontré.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

SUPPLÉMENT AU TOME II.

ERRATA.

Page 33, formule (30), mettre devant $\omega_\mu(x, a)$ le facteur $e^{-\frac{\mu\pi i(a-x)}{2K}}$ et devant le secoud terme du crochet le coefficient 2.

10623 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.